Rect@ Vol 10 Diciembre 2009. Pp 253 - 265

Recibido

10/10/2009

Revisado

2/12/2009

Aceptado

21/12/2009

Teoría de la empresa bajo incertidumbre con mercado de futuros: el papel de los costes fijos y de un impuesto sobre los beneficios

Alberto A. Álvarez López [*] aalvarez@cee.uned.es.

Inmaculada Rodríguez Puerta[**] irodpue@upo.es

**Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa II, UNED,*

***Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica, Universidad Pablo de Olavide. .*

RESUMEN

El modelo "seminal", para la empresa competitiva bajo incertidumbre en el precio, presentado por Sandmo (1971) es ampliado por Holthausen (1979) considerando un mercado de futuros para el bien producido por la empresa. En el presente articulo examinamos dos aspectos no estudiados por este autor: el efecto de una variación en los costes fijos y la consideración de un impuesto sobre los beneficios. Asimismo, demostramos todos los resultados, incluidos los obtenidos originalmente por Holthausen, con una metodología nueva para este modelo, la cual es una generalización y ampliación de Lippman y McCall (1982).

***Palabras claves*:** empresa competitiva, incertidumbre en el precio, utilidad esperada, aversión al riesgo, mercado a plazo, costes fijos, impuesto sobre los beneficios

ABSTRACT

The seminal model for the competitive firm under price uncertainty presented by Sandmo (1971) is enhanced by Holthausen (1979) by considering a forward market for the output produced by the firm. Our paper examines two aspects not studied in Holthausen's paper: the effect of a variation in fixed costs and the consideration of a profit tax. In addition, we proof our results, including those originally obtained by Holthausen, with methods which are new for this model; these methods generalize and enhance those of Lippman y McCall (1982).

Keywords: competitive firm, price uncertainty, expected utility, risk aversion, forward market, fixed costs, profit taxation.

Agradecimientos

Álvarez ha disfrutado de financiación a cuenta del Proyecto de Investigación de la CICYT con referencia ECO2008-06395-C05-03.

Los autores queremos agradecer expresamente a dos evaluadores o evaluadoras anónimos sus observaciones y sugerencias, que han contribuido a mejorar sensiblemente el trabajo. Por supuesto, de los errores que queden sólo los autores somos responsables.

1.- Introducción

En este trabajo, estudiamos el comportamiento óptimo de una empresa competitiva que debe afrontar incertidumbre en el precio al cual podrá vender su producto. Las decisiones de producción deben ser tomadas por la empresa antes de conocer el precio de venta, pero es posible reducir la incertidumbre gracias a un mercado de futuros que existe para el bien que se produce.

SANDMO (1971) presenta un estudio sistemático de la teoría de la empresa competitiva bajo incertidumbre en el precio y aversión al riesgo. En este modelo, la empresa sólo tiene una variable de decisión: el nivel de producción. Más adelante, HOLTHAUSEN (1979) lo amplía introduciendo la posibilidad de cobertura en forma de un mercado de futuros para el producto que la empresa fabrica, de manera que ésta tiene ahora una segunda variable de decisión: el volumen de operaciones en el mercado de futuros. El comportamiento de la empresa es radicalmente diferente si la consideramos bajo certidumbre, bajo incertidumbre pero sin cobertura, o bajo incertidumbre con la posibilidad de operar en un mercado de futuros.[1]

Dos aspectos que se han estudiado con detalle para la empresa en el contexto del modelo de SANDMO son la influencia de los costes fijos y la consideración de un impuesto sobre los beneficios. SANDMO mismo y LIPPMAN y MCCALL (1982), por ejemplo, llevan a cabo este estudio: muestran cómo, a diferencia del caso con certidumbre, una variación en los costes fijos, o en el tipo de un impuesto sobre los beneficios, tiene cierto efecto sobre el nivel de producción óptimo. En este trabajo, tratamos de dar una respuesta a estos efectos también para la empresa en el contexto del modelo de HOLTHAUSEN.[2] Además, nuestros métodos para demostrar los principales resultados suponen una generalización y ampliación de los empleados por LIPPMAN y MCCALL (1982) para el modelo de SANDMO. Con estos métodos, adaptados al nuevo contexto con mercado de futuros, damos también una prueba alternativa de algunos resultados obtenidos por HOLTHAUSEN.[3]

En la sección 2 presentamos el modelo y sus propiedades básicas. La sección 3

[1]Entre la amplia y variada literatura sobre la teoría de la empresa bajo incertidumbre, SANDMO (1971) es sin duda una de las referencias básicas, y la consideración de instrumentos de cobertura del riesgo —como los mercados a plazo— ha sido una de las principales direcciones de desarrollo de esta teoría. En esta línea de investigación, son a su vez básicos los trabajos de HOLTHAUSEN (1979) y FEDER, JUST y SCHMITZ (1980); entre las contribuciones posteriores, podemos citar, a modo de ejemplo, TAUB (1981) (que considera *cooperativas* en vez de empresas maximizadoras del beneficio total), WONG (2003) (que incluye decisiones de inversión junto con las de producción), WONG (2004) (que introduce restricciones adicionales de liquidez), o ALGHALITH (2006) (que considera incertidumbre en la producción). Otra de las direcciones de desarrollo de la teoría es la consideración de varias fuentes simultáneas de incertidumbre (en el precio de venta y en el precio del factor de producción, por ejemplo); de ello es ilustrativo DALAL y ALGHALITH (2009), junto con muchas de sus referencias. Por otra parte, desde hace unos años los estudios empíricos están cobrando especial interés; por ejemplo, KUMBHAKAR (2002).

[2]Este autor no estudia estos aspectos del modelo en su artículo, a pesar de ser una generalización directa del de SANDMO. Tampoco FEDER, JUST y SCHMITZ (1980), cuyo modelo es muy similar al de HOLTHAUSEN.

[3]El enfoque de LIPPMAN y MCCALL (1982) puede considerarse esencialmente analítico, mientras que el de SANDMO (como el de HOLTHAUSEN) es más bien probabilístico.

está dedicada a estudiar la influencia de una variación de los costes fijos. La sección 4 trata el efecto de un impuesto sobre los beneficios y las consecuencias de una variación en su tipo. La sección 5 muestra un caso particular: empresa con aversión absoluta al riesgo constante y variable aleatoria precio con distribución normal.[4] Finalmente, cerramos con un breve resumen, y en el apéndice recogemos un lema auxiliar.

En este trabajo, las medidas de ARROW–PRATT de aversión al riesgo, absoluta y relativa, para una empresa con función de utilidad de BERNOULLI u (cf. MAS–COLELL, WHINSTON y GREEN (1995, capítulo 6)) serán, respectivamente, las siguientes funciones reales de variable real:

$$s \mapsto r_u(s) = -\frac{u''(s)}{u'(s)} \quad \text{y} \quad s \mapsto R_u(s) = -s\,\frac{u''(s)}{u'(s)}, \quad s \in \mathbb{R},$$

supuesto que u es dos veces derivable y que $u'(s) \neq 0$ para cada $s \in \mathbb{R}$. perteneciente al conjunto de definición de f.

2.- El modelo. Resultados básicos

Consideramos una empresa competitiva con aversión al riesgo que se enfrenta a incertidumbre en el precio al cual podrá vender su producto. Para la empresa, el precio $P \geq 0$ es una variable aleatoria no degenerada, con distribución conocida y media $\mu > 0$. La empresa debe tomar sus decisiones (en particular, la de producción) *antes* de la fecha de venta, momento en que la incertidumbre se resolverá (el precio al contado se hará conocido).

El coste total asociado a un nivel de producción $x \geq 0$ es $C(x)$, que se compone de un coste variable $c(x)$ y un coste fijo B.[5] La función C se supone de clase $\mathcal{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ y tal que $C' > 0$ y $C'' > 0$.[6] La actitud de la empresa frente al riesgo está modelada por una función de utilidad de BERNOULLI u, de clase $\mathcal{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ y tal que $u' > 0$ y $u'' < 0$. En particular, la utilidad es estrictamente creciente, la utilidad marginal es estrictamente decreciente, y la empresa presenta aversión al riesgo.

Suponemos asimismo que existe un mercado de futuros para el bien que produce la empresa. El precio en este mercado se denota por b, y es perfectamente conocido (no incierto). En el momento de decidir sobre la producción, la empresa puede tanto comprar como vender en este mercado de futuros cualquier cantidad de producto para entrega en fecha futura. Más en concreto, por *vender* en el mercado de futuros un volumen igual a h (o, simplemente, vender h futuros) entenderemos recibir un efectivo de bh, en el momento de la toma de la decisión, a cambio de comprometerse a entregar h unidades de producto en la fecha en la cual la venta de éste se lleva a

[4]Este caso particular también es estudiado por HOLTHAUSEN en su artículo, pero no hace ninguna referencia a efectos relacionados con costes fijos o con algún impuesto.

[5]Supondremos que el bien producido por la empresa es infinitamente divisible.

[6]Para una función f real de variable real, la desigualdad $f > 0$ significa que $f(s) > 0$ para todo s perteneciente al conjunto de definición de f.

cabo; por *comprar* entenderemos la operación contraria.[7] La empresa, puede, por tanto, utilizar el mercado de futuros para cubrirse, parcial o totalmente, frente a una caída de los precios (vendiendo a plazo parte de su producción o su totalidad); o puede especular comprando a plazo (para vender después al contado tanto su producción como este exceso); o puede, incluso, especular vendiendo a plazo más de lo que produce (obligándose a adquirir más tarde, al contado, la diferencia).

El beneficio π que obtiene la empresa a partir de un nivel de producción x y un volumen h de operaciones en el mercado de futuros está dado por:

$$\pi(x,h) = Px + bh - Ph - C(x) = P(x-h) + bh - C(x),$$

donde Px es el montante recibido por la venta de lo producido, bh es el efectivo de la operación a plazo, Ph es lo que cuesta la cantidad de producto con la que se ha operado a plazo, y $C(x)$ es el coste total de producción. La empresa busca maximizar la utilidad esperada U de este beneficio, es decir:

$$U(x,h) = E\big[u\big(\pi(x,h)\big)\big] = E\big[u\big(P(x-h) + bh - C(x)\big)\big]\,,$$

donde la variable x debe ser positiva o nula y la variable h no está sometida a restricción. Las condiciones de primer orden para este problema de maximización son:

$$U'_x(x,h) = E\big[u'\big(\pi(x,h)\big)\cdot\big(P - C'(x)\big)\big] = 0,$$
$$U'_h(x,h) = E\big[u'\big(\pi(x,h)\big)\cdot(b-P)\big] = 0,$$

donde U'_x y U'_h denotan las derivadas parciales de U con respecto a x y a h, respectivamente. Asimismo, las derivadas parciales segundas de la función U son:

$$U''_{x^2}(x,h) = E\Big[u''\big(\pi(x,h)\big)\cdot\big(P - C'(x)\big)^2 - u'\big(\pi(x,h)\big)\cdot C''(x)\Big]\,,$$
$$U''_{xh}(x,h) = E\big[u''\big(\pi(x,h)\big)\cdot\big(P - C'(x)\big)\cdot(b-P)\big]\,,$$
$$U''_{h^2}(x,h) = E\Big[u''\big(\pi(x,h)\big)\cdot\big(b-P\big)^2\Big]\,,$$

y se tiene que $U''_{x^2} < 0$ y que $U''_{x^2}\cdot U''_{h^2} - (U''_{xh})^2 > 0$, con lo que la función U es estrictamente cóncava sobre $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$. A partir de ahora, supondremos que existe una solución interior (x^*, h^*) que satisface las condiciones de primer orden anteriores, con lo que este punto (x^*, h^*) es el máximo global único de U sobre $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Y como es interior, en particular: $x^* > 0$, esto es, la empresa decide en efecto producir.

El primer resultado que obtiene Holthausen es *la caracterización del nivel de producción óptimo como aquél cuyo coste marginal es igual al precio en el mercado de futuros*. En efecto: sumando ambas condiciones necesarias, se obtiene:

$$E\big[u'\big(\pi(x^*,h^*)\big)\big]\,\big(b - C'(x^*)\big) = 0,$$

[7]Desde el punto de vista de la empresa, la operación en el mercado de futuros se interpreta como una venta si h es positivo, y como una compra si h es negativo. Por otra parte, consideraremos a la variable h —como a la x— continua.

de donde: $b = C'(x^*)$, pues $u' > 0$. Este resultado establece que la empresa se comporta, en lo que a sus decisiones de producción se refiere, como si operara en un entorno de certidumbre con precio el del mercado de futuros. Como consecuencia, la decisión de producción no se verá afectada por posibles variaciones en algún elemento del modelo distinto del precio de futuro o del coste marginal.

Sobre la decisión de cobertura, Holthausen muestra la influencia en tal decisión de la relación entre el precio del futuro: b, y el precio esperado del producto: $E[P] = \mu$. Enunciamos el resultado a continuación, y lo probamos con un método distinto al de este autor:

Proposición 1. *Si $b = \mu$, entonces $h^* = x^*$; si $b < \mu$, entonces $h^* < x^*$; y si $b > \mu$, entonces $h^* > x^*$.*

Demostración. Consideremos la variable aleatoria $X = b - P$ y las funciones $\psi \equiv 1$ (constantemente igual a 1) y $t \mapsto \phi(t) = u'\big(t(h^* - x^*) + bx^* - C(x^*)\big)$. Con esta elección, se tiene:

$$E[X\,\phi(X)\,\psi(X)] = E\big[(b-P)\cdot u'\big(\pi(x^*, h^*)\big)\big] = U'_h(x^*, h^*) = 0,$$

$$\phi(0) = u'\big(bx^* - C(x^*)\big) > 0 \quad \text{y} \quad E[X\,\psi(X)] = b - \mu.$$

Si $b - \mu \neq 0$, aplicando el lema del apéndice obtenemos que $b - \mu$ es positivo o negativo según sea la función ϕ estrictamente decreciente o estrictamente creciente, respectivamente; ahora bien, como $\phi'(t) = u''\big(t(h^* - x^*) + bx^* - C(x^*)\big) \cdot (h^* - x^*)$, y $u'' < 0$, esta función ϕ es estrictamente decreciente o estrictamente creciente según sea $h^* - x^*$ positivo o negativo, respectivamente. Por otro lado, si $b = \mu$, la aplicación del lema nos llevaría a contradicción salvo que la función ϕ no fuera ni estrictamente creciente ni estrictamente decreciente, o equivalentemente (a la vista de la expresión de ϕ'): salvo que $h^* - x^* = 0$. Q.E.D.

En palabras: *la empresa cubrirá toda su producción si y sólo si el precio del futuro es igual al precio esperado; si el precio del futuro es menor, la empresa cubrirá sólo parte de su producción (o incluso podrá especular comprando a futuro); y si el precio del futuro es mayor, la empresa especulará vendiendo a futuro más de lo que produce.*

Holthausen también estudia el efecto de cambios en la aversión al riesgo, los cuales sólo pueden afectar a las decisiones de cobertura. Su resultado es el siguiente, y de nuevo damos una demostración distinta:

Proposición 2. *Se consideran dos empresas en las condiciones del modelo, con funciones de utilidad u y v, y con niveles óptimos de cobertura h_u^* y h_v^*, respectivamente. Supuesto que la aversión absoluta al riesgo de la primera es mayor que la de la segunda, es decir:*

$$r_u(s) > r_v(s) \quad \textit{para todo } s \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

se verifica que $h_u^* > h_v^*$ cuando $b < \mu$, y $h_u^* < h_v^*$ cuando $b > \mu$.

Demostración. Notemos que ambas empresas eligen el mismo nivel de producción: x^*. Sea V la función de utilidad esperada de la segunda empresa; en particular:

$$V'_h(x,h) = E\big[v'\big(\pi(x,h)\big)\cdot(b-P)\big] \quad \text{y} \quad V'_h(x^*,h^*_v)=0.$$

Consideremos la variable aleatoria $X = b - P$ y las funciones:

$$t \mapsto \xi(t) = v'\big(t(h^*_u - x^*) + bx^* - C(x^*)\big),$$
$$t \mapsto \psi(t) = u'\big(t(h^*_u - x^*) + bx^* - C(x^*)\big) \quad \text{y} \quad \phi = \xi/\psi.$$

En el caso $b < \mu$ (y por ende: $h^*_u < x^*$, cf. proposición 1), la función ϕ es estrictamente decreciente. Para verlo, podemos calcular la derivada de ϕ; si $\zeta = (r_u - r_v)\cdot(v'/u')$, entonces $\zeta > 0$ de acuerdo con (1), y se tiene:[8]

$$\phi'(t) = (h^*_u - x^*)\,\zeta\big(t(h^*_u - x^*) + bx^* - C(x^*)\big);$$

por tanto: $\phi' < 0$, y ϕ es en efectivamente estrictamente decreciente. Ahora, de acuerdo con el lema del apéndice, obtenemos:

$$V'_h(x^*,h^*_u) < \phi(0)\cdot U'_h(x^*,h^*_u) = 0 = V'_h(x^*,h^*_v),$$

y el resultado se concluye del hecho de que la función $s \mapsto V'_h(x^*,s)$ es estrictamente decreciente (su derivada es negativa: $V''_{h^2}(x^*,s) = E\big[v''\big(\pi(x^*,s)\big)\cdot(b-P)^2\big] < 0$ para todo s). La demostración para el caso $b > \mu$ es, *mutatis mutandis*, la misma. Q.E.D.

En palabras, si consideramos dos empresas en las condiciones del modelo, una con aversión absoluta al riesgo mayor que la otra, entonces se verifica: *si el precio del futuro es menor que el precio esperado, la empresa más aversa al riesgo operará en el mercado de futuros con un volumen mayor de producto que la otra; si el precio del futuro es mayor que el precio esperado, la empresa menos aversa es la que operará en el mercado de futuros con un volumen mayor.*

Una explicación para este resultado es simple. Es razonable pensar que la aversión al riesgo cause que la empresa prefiera beneficios menores pero seguros antes que beneficios esperados mayores. En el caso $b < \mu$, un aumento del volumen de operaciones en el mercado de futuros significa aumentar los beneficios seguros y renunciar a algún beneficio esperado mayor; en el caso $b > \mu$, disminuir el volumen de operaciones en el mercado de futuros significa reducir una venta especulativa, y por tanto también renunciar a algún beneficio esperado.

3.- Influencia de los costes fijos

El nivel de producción óptimo sólo depende del precio en el mercado de futuros y del coste marginal, y ambas magnitudes son independientes del coste fijo. En

[8] Si $A \equiv t(h^*_u - x^*) + bx^* - C(x^*)$, podemos escribir:

$$\phi'(t) = (h^*_u - x^*)\,\frac{v''(A)\,u'(A) - v'(A)\,u''(A)}{u'(A)^2} = (h^*_u - x^*)\,\frac{v'(A)}{u'(A)}\big(r_u(A) - r_v(A)\big) = (h^*_u - x^*)\,\zeta(A).$$

consecuencia, una variación en los costes fijos sólo puede afectar a las decisiones sobre las operaciones en el mercado de futuros.

Para estudiar esta influencia, supongamos que el coste fijo de la empresa se incrementa del valor B a un nuevo valor B_1, de manera que el nivel óptimo de cobertura cambia de su valor original h^* a un (posiblemente) nuevo valor h_1^*. Nos gustaría comparar ambos valores del nivel óptimo de cobertura.

El resultado principal sobre este efecto es una consecuencia sencilla del comportamiento de la empresa cuando varía la aversión al riesgo.

Proposición 3. *Si la medida de* Arrow–Pratt *de la aversión absoluta al riesgo de la empresa es una función estrictamente decreciente, entonces: $h^* < h_1^*$ cuando $b < \mu$, y $h^* > h_1^*$ cuando $b > \mu$.*

Demostración. Denotemos por α la diferencia positiva $B_1 - B$, y consideremos la función de utilidad v definida por: $s \mapsto v(s) = u(s - \alpha)$. Un incremento en el coste fijo del valor B al valor $B + \alpha$ lleva a la empresa a maximizar la función:

$$E\big[u\big(P(x-h) + bh - c(x) - B_1\big)\big] = E\big[v\big(\pi(x,h)\big)\big]\,;$$

además, se tiene que $r_v(s) > r_u(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$, ya que:

$$r_v(s) = -\frac{v''(s)}{v'(s)} = -\frac{u''(s-\alpha)}{u'(s-\alpha)} = r_u(s-\alpha) > r_u(s),$$

donde hacemos uso de que la función r_u es estrictamente decreciente. La tesis de la proposición se infiere finalmente aplicando la proposición 2. Q.E.D.

En palabras: *bajo la hipótesis de que la empresa presenta aversión absoluta al riesgo estrictamente decreciente, si el precio del futuro es menor que el precio esperado, un incremento en el coste fijo causa un aumento de la cobertura; si el precio del futuro es mayor que el precio esperado, un aumento del coste fijo causa una disminución de la cobertura.*

Este comportamiento puede explicarse de la siguiente manera. Un incremento en el coste fijo puede verse como una disminución en los beneficios. Una empresa con aversión absoluta al riesgo estrictamente decreciente "siente" más aversión al riesgo ante beneficios menores. La empresa intentará entonces incrementar su beneficio seguro y renunciará a algún beneficio esperado. En el caso $b < \mu$, lo consigue incrementando el nivel de cobertura; en el caso $b > \mu$, lo consigue disminuyendo el nivel de cobertura.

Es de observar que si la aversión absoluta al riesgo de la empresa es estrictamente creciente, entonces se tienen las desigualdades de la tesis de la proposición 3 en el otro sentido.

4.- El efecto de un impuesto sobre los beneficios

En esta sección ampliamos el modelo al considerar un impuesto sobre los beneficios.[9] En concreto, suponemos que hay un impuesto proporcional sobre los beneficios a un

[9] En Sandmo (1971, p. 70), el autor discute sobre la posibilidad de que la tributación permita o no una compensación por pérdidas. Si no hay tal compensación, el beneficio neto después

tipo τ, $0 < \tau < 1$, de forma que el beneficio después de impuestos viene dado por:

$$\pi_\tau(x,h) = (1-\tau)\,\pi(x,h) = (1-\tau)\big(P(x-h) + bh - C(x)\big),$$

y la empresa busca x_τ^* y h_τ^* que maximicen la utilidad esperada U_τ definida por:

$$U_\tau(x,h) = E\big[u\big(\pi_\tau(x,h)\big)\big]\,.$$

Un primer resultado importante es que *el nivel óptimo de producción escogido por la empresa no cambia por considerar el impuesto, esto es:* $x_\tau^* = x^*$. Esto puede probarse formalmente, como antes, sumando las dos condiciones necesarias de primer orden correspondientes al nuevo problema de optimización.

Un segundo resultado destacable versa sobre la caracterización de las operaciones en el mercado de futuros en función de la relación entre el precio del futuro y el precio esperado: tal caracterización sigue siendo válida después de considerar el impuesto. Es decir: *si* $b = \mu$, *entonces* $h_\tau^* = x^*$; *si* $b < \mu$, *entonces* $h_\tau^* < x^*$; *y si* $b > \mu$, *entonces* $h_\tau^* > x^*$. La demostración es similar a la del resultado correspondiente sin impuestos.[10]

A continuación, estamos interesados en la influencia de una variación en el tipo del impuesto. Tal variación sólo puede influir en las decisiones de cobertura.

Proposición 4. *Supuesto que la medida de* Arrow–Pratt *de la aversión relativa al riesgo es una función estrictamente decreciente, si el tipo* τ *aumenta, entonces el nivel* h_τ^* *aumenta cuando* $b < \mu$, *y disminuye cuando* $b > \mu$.

Demostración. La condición de primer orden para la maximización de U_τ con respecto a h es:

$$(1-\tau)\,E\big[u'\big(\pi_\tau(x,h)\big)\cdot(b-P)\big] = 0,$$

o equivalentemente: $E\big[u'\big(\pi_\tau(x,h)\big)\cdot(b-P)\big] = 0$, y cualquiera que sea $\tau \in (0,1)$ esta condición se satisface para $x = x^*$ y $h = h_\tau^*$. Dado

$$G(\tau,h) = E\big[u'\big(\pi_\tau(x^*,h)\big)\cdot(b-P)\big]\,,$$

se tiene entonces: $G(\tau, h_\tau^*) = 0$; y en esta ecuación estamos en condiciones de aplicar el teorema de la función implícita, ya que:

$$G'_h(\tau,h) = (1-\tau)\,E\big[u''\big(\pi_\tau(x^*,h)\big)\cdot(b-P)^2\big] < 0 \quad \text{para todo } \tau \text{ y todo } h.$$

---

de impuestos (siendo éstos a un tipo τ) viene dado por $(1-\tau)\pi$ cuando el beneficio bruto π es positivo o nulo, y es simplemente igual al beneficio bruto cuando éste es negativo. Pero si hay compensación por pérdidas, el beneficio neto viene dado, en todos los casos, por $(1-\tau)\pi$. Sandmo considera plausibles ambas formalizaciones, aunque se decide por la segunda, pues el sistema tributario de muchos países permite compensar pérdidas con otros ingresos, o incluso a cuenta de beneficios futuros. Nosotros formalizamos aquí el impuesto sobre beneficios como lo hace Sandmo (considerando la compensación por pérdidas), que es también como lo hacen Lippman y McCall (1982).

[10] Cf. proposición 2. Es simplemente repetir la demostración de esta proposición considerando como función ϕ esta otra: $t \mapsto \phi(t) = u'\big((1-\tau)\big[t(h_\tau^* - x^*) + bx^* - C(x^*)\big]\big)$.

Podemos, pues, considerar la variable h^*_τ como una función implícita de la variable τ en un entorno de cada punto (τ, h^*_τ) $(0 < \tau < 1)$; tal función es además derivable en cada $\tau \in (0,1)$, con derivada:

$$-\frac{G'_\tau(\tau, h^*_\tau)}{G'_h(\tau, h^*_\tau)}.$$

Esta derivada tiene el mismo signo que su numerador, ya que el denominador es negativo. Se tiene:

$$\begin{aligned} G'_\tau(\tau, h^*_\tau) &= -\frac{1}{1-\tau} E\big[u''\big(\pi_\tau(x^*, h^*_\tau)\big) \cdot \pi_\tau(x^*, h^*_\tau) \cdot (b-P)\big] \\ &= \frac{1}{1-\tau} E\big[u'\big(\pi_\tau(x^*, h^*_\tau)\big) \cdot R_u\big(\pi_\tau(x^*, h^*_\tau)\big) \cdot (b-P)\big]\,. \end{aligned}$$

Si consideramos aquí la variable aleatoria $X = b - P$ y las funciones:

$$\begin{aligned} t \mapsto \psi(t) &= u'\big((1-\tau)[t(h^*_\tau - x^*) + bx^* - C(x^*)]\big)\,, \\ t \mapsto \phi(t) &= R_u\big((1-\tau)[t(h^*_\tau - x^*) + bx^* - C(x^*)]\big)\,, \end{aligned}$$

entonces $\psi > 0$, y ϕ es estrictamente creciente o estrictamente decreciente según sea $b < \mu$ o $b > \mu$, respectivamente, tal como podemos deducir del hecho de que R_u es estrictamente decreciente; además:

$$E[X\,\psi(X)] = E\big[u'\big(\pi_\tau(x^*, h^*_\tau)\big) \cdot (b-P)\big] = G(\tau, h^*_\tau) = 0.$$

Con el lema del apéndice, concluimos que $G'_\tau(\tau, h^*_\tau)$ es positivo o negativo según sea $b < \mu$ o $b > \mu$, respectivamente. Y la misma propiedad es verificada por la derivada en τ de la función $\tau \mapsto h^*_\tau$. Q.E.D.

Podemos ofrecer una explicación de este comportamiento de la siguiente manera. Un incremento en el tipo del impuesto supone una disminución proporcional de los beneficios, y una empresa con aversión relativa al riesgo estrictamente decreciente presenta más aversión al riesgo ante disminuciones proporcionales de los beneficios. La empresa tratará entonces de aumentar su beneficio seguro y renunciará a algún beneficio esperado. Si $b < \mu$, lo consigue aumentando el nivel de cobertura; si $b > \mu$, lo consigue disminuyendo el nivel de cobertura.

Finalmente, observemos que si la aversión relativa al riesgo de la empresa es estrictamente creciente, entonces se tiene la tesis contraria a la de la proposición 4.

5.- Estudio de un caso particular

En esta sección, estudiamos el caso particular de una empresa del tipo CARA (*constant absolute risk aversion*) para la cual la variable aleatoria precio sigue una distribución normal. Más en concreto, supongamos que la función de utilidad de la empresa es: $u(s) = -e^{-as}$ donde $a > 0$, de forma que la empresa presenta aversión absoluta al riesgo constante e igual a a; y supongamos también que la variable aleatoria P es una normal de media μ y varianza σ^2. En este caso, se puede probar que la utilidad esperada $U(x,h)$ toma la forma:[11]

$$U(x,h) = -\exp\Big[-a\Big(\mu(x-h) + bh - C(x) - \frac{a\sigma^2(x-h)^2}{2}\Big)\Big],$$

y la maximización de esta utilidad $U(x,h)$ (dado que $t \mapsto -e^{-at}$ es estrictamente creciente) es equivalente a la de:

$$\mu(x-h) + bh - C(x) - \frac{a\sigma^2(x-h)^2}{2}. \tag{2}$$

Se puede comprobar fácilmente que esta función —en las variables (x,h)— es estrictamente cóncava; un punto donde se anulen las derivadas parciales primeras correspondientes será, pues, máximo global de la función. A partir de las dos condiciones necesarias de primer orden para este problema, sumando, se deduce la caracterización $C'(x^*) = b$, como era de esperar; y, a partir de la condición necesaria para la variable h, se obtiene:

$$x^* - h^* = \frac{\mu - b}{a\sigma^2}.$$

Esta última igualdad permite ejemplificar fácilmente los resultados de la sección 2. Por ejemplo, si $b < \mu$, entonces $h^* < x^*$, y si $b > \mu$, entonces $h^* > x^*$; y si aumenta la aversión al riesgo (es decir, si a crece), entonces h^* se acerca a x^*.

En este contexto particular, si se produce un aumento de los costes fijos del valor original B a un nuevo valor $B + \alpha$ (con $\alpha > 0$), la nueva función que hay que maximizar es: $\mu(x-h)+bh-C(x)-\alpha-a\sigma^2(x-h)^2/2$, que alcanza el máximo en el mismo punto que la función de (2). Una variación en los costes fijos no influye, pues, ni siquiera en las decisiones de cobertura. Obviamente, no estamos en contradicción con la proposición 3, pues en ésta se exigía aversión absoluta al riesgo estrictamente decreciente.

Por otra parte, si consideramos un impuesto proporcional sobre los beneficios a un tipo τ, con $0 < \tau < 1$, la maximización de la utilidad $U_\tau(x,h)$ resulta equivalente a la de:

$$\mu(x-h) + bh - C(x) - \frac{a(1-\tau)\sigma^2(x-h)^2}{2}$$

(que también resulta ser estrictamente cóncava), y de la condición necesaria de primer orden para la variable h se obtiene:

$$x^* - h^* = \frac{\mu - b}{a\sigma^2(1-\tau)}.$$

Esta igualdad ilustra los resultados de la sección 4. En efecto. Si el tipo impositivo aumenta, entonces el nivel de cobertura óptimo se *aleja* del nivel de producción

[11] La demostración de esta igualdad es sencilla pero engorrosa. Los autores estarán encantados de hacerla llegar a quien la requiera.

óptimo; más en concreto, si $b < \mu$ (y por tanto: $h^* < x^*$), entonces h^* *disminuye*; y si $b > \mu$, entonces h^* *aumenta*. Estas afirmaciones, que son justo las contrarias de las aseveradas por la proposición 4, son las que se satisfacen cuando la aversión relativa al riesgo es estrictamente creciente (cf. observación al final de la sección 4). Pero, por supuesto, una empresa con aversión absoluta al riesgo constante presenta aversión relativa estrictamente creciente.

6.- Resumen

En este artículo, mostramos un modelo para estudiar el comportamiento de una empresa competitiva que se enfrenta a incertidumbre en el precio al cual podrá vender su producto. La empresa debe decidir cuánto producir antes de saber el precio de venta, pero puede reducir su incertidumbre operando en un mercado de futuros que existe para el bien que produce. En un primer paso, mostramos las propiedades más básicas: caracterización de la producción óptima, caracterización de la inversión en el mercado de futuros según la relación entre el precio esperado y el del futuro, y comportamiento ante variaciones en el riesgo.

En un segundo paso, nos centramos en el estudio de la influencia de una variación en los costes fijos, la cual sólo tiene efecto en las operaciones a futuro. Y, a continuación, ampliamos el modelo introduciendo un impuesto proporcional sobre los beneficios. Ello lleva a considerar un nuevo problema de decisión, del cual estudiamos sus propiedades: mostramos que la producción no varía por haber introducido el impuesto, y que todavía es válida la caracterización de las operaciones con futuros en función del precio del futuro y del precio esperado. Asimismo, estudiamos el comportamiento de la empresa cuando varía el tipo del impuesto.

La metodología empleada es totalmente distinta de la utilizada en HOLTHAUSEN (1979). Generalizamos la que LIPPMAN y MCCALL (1982) emplean para atacar los problemas del artículo de SANDMO (1971).

Finalmente, estudiamos un ejemplo que puede resolverse con relativa facilidad: consideramos una empresa con aversión absoluta al riesgo constante, y tal que para ella la variable aleatoria precio se distribuye como una normal.

Apéndice

Hemos hecho uso del siguiente lema:[12]

Lema. *Sean ϕ y ψ dos funciones reales definidas sobre $\mathbb{R}$ tales que $\psi > 0$ y ϕ es estrictamente creciente. Si $\xi = \phi \cdot \psi$, y X es una variable aleatoria con varianza positiva y tal que $E[X\,\psi(X)]$ es finita, entonces:*

$$E[X\,\xi(X)] > \phi(0)\,E[X\,\psi(X)]\,,$$

y esta desigualdad se tiene en el otro sentido si ϕ is estrictamente decreciente.

[12] Este lema está tomado de LIPPMAN y MCCALL (1982): es un resultado parcial en la demostración de su teorema 2 en la sección 5 (p. 252).

Demostración. Cuando $t < 0$, se tiene: $\phi(t) < \phi(0)$ (ya que ϕ es estrictamente creciente), y por tanto:

$$t\,\phi(t)\,\psi(t) > t\,\phi(0)\,\psi(t)$$

(ya que $\psi > 0$), pero esta desigualdad también se satisface cuando $t > 0$. El resultado se obtiene tras un sencillo cálculo. Q.E.D.

Bibliografía

- Alghalith, M. (2006): "Hedging decisions with price and output uncertainty", *Annals of Finance*, **2**, 225–227.

- Dalal, A. J. y Alghalith, M. (2009): "Production decisions under joint price and production uncertainty", *European Journal of Operational Research*, **197**, 84–92.

- Feder, G., R. E. Just, y A. Schmitz (1980): "Futures markets and the theory of the firm under price uncertainty", *Quarterly Journal of Economics*, **94**, 317–328.

- Holthausen, D. M. (1979): "Hedging and the competitive firm under price uncertainty", *The American Economic Review*, **69**, 989–995.

- Kumbhakar, S. C. (2002): "Risk preference and productivity measurement under output price uncertainty", *Empirical Economics*, **27**, 461–472.

- Lippman, S. A., y J. J. McCall (1982): "The economics of uncertainty: selected topics and probabilistic methods", en *Handbook of Mathematical Economics (vol. 1)*, por K. J. Arrow y M. D. Intriligator, eds., North Holland: Amsterdam, capítulo 6.

- Mas-Colell, A., M. Whinston, y J. Green (1995): *Microeconomic Theory*. Oxford University Press: New York.

- Sandmo, A. (1971): "On the theory of the firm under price uncertainty", *The American Economic Review*, **61**, 65–73.

- Taub, A. J. (1981): "Future markets and the cooperative firm under price uncertainty", *Eastern Economic Journal*, **VII**, 157–161.

- Wong, K. P. (2003): "Forward markets and the behaviour of the competitive firm with production flexibility", *Bulletin of Economic Research*, **5**, 303–310.

- Wong, K. P. (2004): "Hedging, liquidity, and the competitive firm under price uncertainty", *The Journal of Futures Markets*, **24**, 697–706.