

TARIFICACIÓN DE DERIVADOS SOBRE CATÁSTROFES CON DESENCADENANTES DE ÍNDICES DE PÉRDIDAS: MODELO ASINTÓTICO BASADO EN UN PROCESO GEOMÉTRICO DE WIENER

MARÍA JOSÉ PEREZ-FRUCTUOSO

mariajose.perez@udima.es

*Universidad a Distancia de Madrid (UDIMA)/ Departamento de Economía y Administración de Empresas
Carretera de La Coruña, KM 38,500, Vía de servicio nº 15, 28400, Collado-Villalba, Madrid*

Recibido (05/04/2016)

Revisado (09/07/2016)

Aceptado (11/09/2016)

RESUMEN: Este artículo propone un modelo de valoración de derivados sobre seguros basados en índices de pérdidas. Para ello, se considera que la cuantía total de la catástrofe, está formada por la suma de dos variables aleatorias; la cuantía declarada de siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declarar. La hipótesis central del modelo se basa en suponer un decrecimiento temporal de esta última cuantía, proporcional a una función exponencial, denominada tasa de declaración de siniestros asintótica. La dinámica de este decrecimiento se representa a través de un movimiento browniano geométrico y la cuantía declarada de siniestros, numerador de la ratio de pérdidas que se quiere determinar, se obtiene por diferencia entre la cuantía de siniestros pendiente de declarar y la cuantía total de la catástrofe. Finalmente, se comprueba la validez del modelo propuesto estimando sus parámetros y contrastando la bondad del ajuste realizado sobre una muestra de seis inundaciones ocurridas en diferentes localidades españolas propensas a sufrir este tipo de eventos.

Palabras claves: derivados sobre seguros, cuantía de siniestros pendiente de declarar, cuantía declarada de siniestros, tasa de declaración de siniestros asintótica, índice de pérdidas por catástrofes, movimiento Browniano geométrico.

ABSTRACT: This paper proposes a valuation model for insurance-linked derivatives written on a catastrophic loss index. To this aim, we consider that the total amount of the thus covered catastrophe results from the sum of two random variables, the reported claims amount and the reported-but-not-yet-reported claims amount. The central hypothesis of our model assumes a temporary decrease of the latter, proportional to an exponential function that we call asymptotic reporting claims rate. We represent the dynamics of this decrease through a geometric Brownian motion, whereas the reported claims amount, numerator of the loss ratio intended to be determined, is obtained by the difference between the incurred-but-not-yet-reported claims amount and the catastrophe's total amount. Finally, we test the validity of the model by estimating its parameters and contrasting the goodness-of-fit with a sample of six floods in different Spanish cities prone to suffer this type of events.

Keywords: Insurance-linked derivatives, incurred-but-not-yet-reported loss amount, reported loss amount, asymptotic claim reporting rate, catastrophic loss index, geometric Brownian motion.

1. Introducción

En los últimos años, se ha producido un aumento espectacular de los daños asegurados como consecuencia de dos factores: por una parte los cambios climáticos y geológicos que han incrementado considerablemente la frecuencia y severidad de las catástrofes naturales, y por otra, la concentración y el crecimiento de la población, y por tanto de valores materiales asegurados, en zonas urbanas propensas, o potencialmente propensas, a sufrir este tipo de desastres. En Europa, por ejemplo, las pérdidas derivadas de la ocurrencia de tempestades e inundaciones han alcanzado más de 26.000 millones de euros desde mediados de la década de 1990 y las proyecciones realizadas por los expertos indican un aumento de estos riesgos hasta máximos históricos de 40.000 millones de euros para los próximos años. Derivado de ello, el mercado asegurador mundial se ha visto más expuesto a pérdidas por catástrofes que pueden comprometer la solvencia y la estabilidad de las compañías que operan en él, si no son capaces de obtener la financiación y diversificación necesarias para asegurar su viabilidad futura y la protección de sus asegurados. Reducir la concentración de las pólizas aseguradas en aquellos ramos más vulnerables a estos eventos catastróficos y aumentar la contratación de reaseguro para cubrir una mayor proporción de las pérdidas potenciales, han sido las soluciones tradicionalmente utilizadas para cubrir este incremento en la siniestralidad catastrófica. Pero las graves crisis vividas, por ejemplo, tras del huracán Andrew en 1992, los atentados terroristas del 11-S de 2001 o los huracanes Katrina, Rita y Wilma de 2005, hicieron desaparecer muchas entidades aseguradoras e incrementaron sustancialmente las primas de seguros en los ramos más afectados por este tipo de sucesos, poniendo en entredicho la viabilidad de tales soluciones.

De hecho, ningún asegurador pudo ofrecer una respuesta de cobertura adecuada con los mecanismos tradicionales. Por ello, nuevos grupos de gestores de riesgos, como bancos, grandes empresas e inversores institucionales, desarrollaron y perfeccionaron instrumentos alternativos de transferencia y financiación de este tipo de riesgos basados en los mercados de capital, y elaboraron métodos fiables de cuantificación para evaluarlos, considerando además su constante evolución. Conocidos con el nombre de titulización (*securitization*), estos nuevos productos incrementan la capacidad de suscripción, ofertando mayores coberturas allí donde las tradicionales se han revelado insuficientes o nulas, mediante la creación y emisión de derivados financieros basados en seguros (*Insurance-Linked Securities*, en adelante ILS), como bonos, opciones y swaps. Son productos diseñados para satisfacer las necesidades concretas de transferencia de riesgos de quienes los demandan por lo que suelen estar creados a la medida de cada patrocinador, si bien es cierto que hay una tendencia generalizada a la estandarización cuando las características de los mismos lo permiten. De esta forma, las aseguradoras pueden trasladar parte de su riesgo a los inversores quienes toman posiciones en la ocurrencia y el coste de las catástrofes.

Los primeros derivados sobre seguros basados en índices de pérdidas, aparecidos en diciembre de 1992, fueron los contratos CAT: CAT-*futures* y opciones CAT. Su subyacente era una ratio de siniestralidad que relacionaba las pérdidas totales por catástrofes declaradas en un determinado período con el volumen estimado de primas destinadas a cubrir este tipo de pérdidas. Posteriormente, en septiembre de 1995, aparecieron las opciones PCS, cuyo subyacente expresaba las declaraciones de siniestros de naturaleza catastrófica en puntos del índice de referencia.

Otra forma de titulización, más difundida y desarrollada que la anterior, es la emisión de Bonos sobre Catástrofes (o *Cat bonds*). Se trata de productos financieros cuyos flujos, cupones y principal, están condicionados a la ocurrencia de un determinado suceso de naturaleza catastrófica al que se conoce como trigger o desencadenante. A cambio de su incertidumbre en los flujos de caja, los inversores, reciben unas rentabilidades muy superiores a las de otros bonos con similar *rating* de crédito, al tiempo que reducen el riesgo en sus carteras mediante la diversificación. La estructura de los bonos catastróficos depende de cómo se configure la cobertura del riesgo y, por tanto, la indemnización que recibe la compañía cedente que patrocina el bono. Sin embargo, existe una clara preferencia de los inversores por desencadenantes de

índice de pérdidas por su mayor simplicidad interpretativa, y también porque reducen el riesgo moral (los aseguradores podrían no esforzarse en la mitigación y el control de las pérdidas hasta el valor nominal del bono). De modo similar, este tipo de desencadenantes hace innecesaria para las aseguradoras la revelación de detalles de su cartera de negocios a partes externas. El inconveniente fundamental, sin embargo, deriva del empleo de índices pobremente desarrollados, no fielmente representativos de las pérdidas de la industria, y generadores de riesgo de base.

Como consecuencia del uso cada vez mayor de estos derivados sobre seguros basados en índices de pérdidas, resulta especialmente importante analizar, tanto desde un punto de vista teórico como práctico, la valoración y/o tarificación de estos instrumentos financiero-actuariales a lo largo de un horizonte temporal determinado. En el campo actuarial, el precio de un contrato de seguros se obtiene a partir de las hipótesis de la Teoría Clásica del Riesgo, que suponen variables aleatorias cuantías individuales de los siniestros independientes con idéntica distribución de probabilidad, y aplicando el principio mutual a partir del cual los riesgos se distribuyen entre toda la masa asegurada, de forma que en promedio los errores se compensan y la esperanza matemática de la siniestralidad total, o prima pura, es suficiente para llevar a cabo la cobertura. Sin embargo, este procedimiento de determinación del precio del seguro es incongruente con la valoración realizada en los mercados financieros, en los que, la cuantificación de los activos derivados se obtiene, en ausencia de oportunidades de arbitraje, mediante la réplica de carteras formadas por activos simples cuyos resultados son iguales, en todo momento del periodo de negociación, al del activo derivado objeto de valoración. La valoración de los ILS en este contexto requiere la definición de un modelo que permita calcular la evolución temporal de la cuantía total de las pérdidas, y por tanto de la ratio de siniestralidad subyacente de este tipo de contratos.

Muchos estudios académicos han abordado esta cuestión de tarificar este tipo de instrumentos de transferencia alternativa del riesgo a lo largo de un periodo determinado.

Cummins y Geman (1995) y Geman y Yor, (1997), bajo la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje, desarrollan modelos de valoración de opciones y futuros sobre riesgos catastróficos basados en dos hipótesis: por una parte, utilizan procesos geométricos de Wiener, para describir la declaración instantánea de los siniestros y por otra, procesos de Poisson, que incorporan al modelo la posibilidad de ocurrencia de grandes catástrofes. Aase (1999 y 2001), utilizando la metodología financiera del precio de equilibrio, modela la dinámica del índice de pérdidas a través de un proceso de Poisson compuesto con saltos aleatorios para valorar futuros y opciones sobre futuros sobre catástrofes (*CAT futures* y *CAT options*), como caso particular del modelo desarrollado por Embrechts y Meister (1997), que representa el comportamiento del subyacente mediante una mixtura de procesos de Poisson compuestos y una frecuencia de siniestralidad aleatoria. Loubergé, Kellezi y Gilli (1999) aplican el modelo de valoración de opciones sobre catástrofes desarrollado por Cummins y Geman (1995) en un entorno de no arbitraje, para calcular el precio de un bono cupón cero sobre catástrofes cuyo desencadenante es un índice de pérdidas de la industria aseguradora. Cox y Pedersen (2000) proponen un método de cálculo del precio de un *Cat bond* en mercados incompletos a partir de la definición de una determinada estructura temporal de los tipos de interés y de una estructura de probabilidades de ocurrencia del riesgo catastrófico. Baryshnikov, Mayo y Taylor (2001), bajo la hipótesis de negociación continua, proponen una solución neutral al riesgo para el precio del *Cat bond*, utilizando un doble proceso de Poisson compuesto para representar las diferentes características de la dinámica de las catástrofes. Burnecki y Kukla (2003) modifican y aplican los resultados obtenidos por Baryshnikov, Mayo y Taylor (2001) para calcular, en ausencia de oportunidades de arbitraje, precios de *Cat bonds* cupón cero y con cupones y obtener una fórmula de tarificación de estos instrumentos basada en un doble proceso de Poisson compuesto. Muermann (2003) utiliza la modelación del índice de pérdidas desarrollada por Aase (1999) para realizar una valoración, consistente en términos actuariales, de los activos derivados catastróficos negociados en el *Chicago Board of Trade*. Posteriormente, Burnecki (2005) valora *Cat bonds* utilizando procesos de Poisson no homogéneos con distribución de pérdidas truncada por la izquierda. Lee y Yu (2002) desarrollan un modelo contingente de reclamaciones en la valoración de los bonos catastróficos que incorpora tipos de interés estocásticos y un proceso de pérdidas así como otros factores prácticos tales como el azar moral, el

riesgo de base y el riesgo de crédito. Alegre, Pérez-Fructuoso y Devolder (2003) desarrollan un modelo aleatorio en tiempo discreto que modela el comportamiento del índice de pérdidas subyacente de los futuros y opciones sobre riesgos catastróficos negociados en el CBOT. Los autores definen la cuantía total de una catástrofe como la suma de dos variables aleatorias, la cuantía declarada de siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declaración, limitando la posibilidad de ocurrencia de catástrofes a una por período. Lee y Yu (2007) elaboran un entorno contingente de reclamaciones para valorar un contrato de reaseguro y examinar como el uso de *Cat bonds*, permite incrementar el valor de dicho contrato y reducir su riesgo de crédito. Egami y Young (2008) calculan el precio de indiferencia de un *Cat bond* estructurado utilizando como utilidad esperada una función de utilidad exponencial. Pérez-Fructuoso (2008) realiza una extensión al campo continuo del modelo discreto aleatorio de Alegre, Pérez-Fructuoso y Devolder (2003) para modelar los *Cat bonds*. Para ello supone que la dinámica de la cuantía de siniestros pendiente de declarar sigue un movimiento geométrico browniano representativo de un decrecimiento temporal de esta variable a razón de una función real de variable real, denominada tasa de declaración de siniestros. Para el caso de una tasa de declaración de siniestros constante (tasa instantánea de declaración de siniestros) Pérez-Fructuoso (2009) extiende el modelo al cálculo de un índice de pérdidas que permite la valoración de cualquier instrumento derivado vinculado a seguros (ILS). Biagini, Bregman y Meyer-Brandis (2008) valoran opciones sobre riesgos catastróficos y describen el índice mediante un proceso de Poisson compuesto no homogéneo para el período de pérdidas y utilizan un proceso de Levy exponencial no homogéneo para reestimar dicho índice durante el periodo de desarrollo y hasta el vencimiento. Unger (2010) propone una formulación y estrategia de discretización para modelizar *Cat bonds*, utilizando una aproximación numérica para resolver la ecuación en derivadas parciales que modeliza su comportamiento. Nowak y Romaniuk (2013) aplican modelos de ETTI (tipos de interés *spot* libres de riesgo), bajo la hipótesis de que la ocurrencia de la catástrofe es independiente del comportamiento de los mercados financieros, para valorar bonos sobre catástrofes. Zong-Gang y Chao-Qun (2013), con el fin de tarificar el mismo tipo de instrumentos, consideran un entorno de tipos de interés estocásticos, para describir las pérdidas catastróficas a través de un proceso de Poisson compuesto no homogéneo. Finalmente, Lai, Parcollet y Lamond (2014) desarrollan un modelo para obtener una expresión semicerrada del precio de un *Cat bond*, a partir de un proceso de difusión con saltos que representa las catástrofes, de un proceso estocástico tridimensional para representar el tipo de cambio y los tipos de interés nacionales y extranjeros, y del coste de cobertura del riesgo de tipo de cambio.

En este artículo, también se considera un movimiento geométrico browniano para modelar el comportamiento del índice de pérdidas desencadenante de los ILS y se realiza la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje como en Cummins y Geman (1995), Geman y Yor (1997) o Loubergé, Kellezi y Gilli (1999) para llevar a cabo su tarificación. Sin embargo, a diferencia de modelos precedentes, se considera que la siniestralidad instantánea decrece proporcionalmente a la cuantía de siniestros pendiente de declarar en cada momento. Además, observando el comportamiento real de siniestralidad tras la ocurrencia de la catástrofe, parece manifestarse una intensidad en el ritmo de las declaraciones muy elevada durante los primeros días tras el evento, que va desacelerándose con el paso del tiempo, hasta alcanzar un valor constante que se mantiene hasta finalizar el proceso de declaración. Por tanto, en este artículo se propone una tasa de declaración de siniestros definida como una función exponencial con el objetivo de desarrollar una modelización más ajustada del índice de pérdidas por catástrofes desencadenantes de los ILS.

Más específicamente, el artículo está estructurado de la siguiente forma. En la sección 2, tras la definición de las hipótesis básicas sobre las que se modela la ocurrencia de las catástrofes y la declaración de los siniestros, se presenta las soluciones de las variables cuantía declarada de siniestros y cuantía de siniestros pendientes de declarar cuando la tasa de declaración de siniestros se define de forma exponencial. La Sección 3 se dedica al cálculo del índice de pérdidas por catástrofes, a partir de los resultados obtenidos en la Sección anterior. En la Sección 4 se presentan dos ejemplos de valoración, uno de un *Cat bond* cupón cero y otro de un *call spread* de opciones sobre riesgos catastróficos. En la Sección 5 se realiza una validación del modelo propuesto a través de la estimación de sus parámetros, el análisis

de los errores y un contraste de Kolmogorov-Smirnov para muestras independientes. Finalmente, la Sección 6 presenta las principales conclusiones alcanzadas.

2. Dinámica del proceso de declaración de siniestros. Hipótesis y cálculo de las variables fundamentales

Hacemos que K_τ sea la variable aleatoria cuantía total de la catástrofe ocurrida en el momento $\tau \in [0, T]$ y la definimos como la suma de dos variables aleatorias, ambas referidas al momento de valoración t ,

$$K_\tau = S_\tau(t) + R_\tau(t) \quad (1)$$

donde $S_\tau(t)$ representa la cuantía declarada de los siniestros y $R_\tau(t)$ la cuantía de los siniestros pendiente de declarar.

Como hipótesis de partida, se considera que al principio, inmediatamente después de la ocurrencia de la catástrofe, se declara una gran cantidad de siniestros, es decir, la intensidad de declaración es elevada, y a medida que pasa el tiempo el ritmo de las declaraciones asociadas a dicha catástrofe disminuye hasta anularse cuando no queda ningún siniestro pendiente de declarar.

Esta siniestralidad instantánea se representa mediante una ecuación diferencial cierta que describe un crecimiento de la cuantía de siniestros declarada proporcional a la variable cuantía de siniestros pendiente de declarar,

$$dS_\tau(t) = \alpha_\tau(t) R_\tau(t) dt \quad (2)$$

siendo $\alpha_\tau(t)$ una función real de variable real denominada tasa de declaración de siniestros.

Diferenciando la ecuación (1), tenemos,

$$dS_\tau(t) = -dR_\tau(t) dt \quad (3)$$

y substituyendo en la ecuación (2), $dS_\tau(t)$ por el resultado obtenido en (3), resulta la ecuación diferencial cierta que describe la evolución de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R_\tau(t)$:

$$dR_\tau(t) = -\alpha_\tau(t) R_\tau(t) dt \quad (4)$$

A partir de la evidencia empírica es posible constatar que el ritmo de las declaraciones es mayor en los primeros días después de haber ocurrido la catástrofe, lo que provoca, en esos momentos, una mayor disminución de la cuantía de siniestros pendientes de declarar y, consecuentemente, un mayor crecimiento de la cuantía de siniestros declarada. Por ello, se define una *tasa de declaración de siniestros asintótica*, cuya expresión es,

$$\alpha_\tau(t) = \alpha_\tau (1 - e^{-\beta_\tau t}) \quad (5)$$

que supone un crecimiento exponencial de las declaraciones de siniestros de forma que a medida que pasa el tiempo el ritmo de las declaraciones se reduce proporcionalmente al parámetro β_τ , denominado *tiempo medio de declaración de los siniestros*, hasta alcanzar, en el límite, el valor de la tasa constante α_τ .

De esta forma, la ecuación diferencial cierta que describe el comportamiento de la cuantía de siniestros pendiente de declarar queda definida como sigue:

$$dR_\tau(t) = -(\alpha_\tau (1 - e^{-\beta_\tau t})) R_\tau(t) dt \quad (6)$$

De la resolución de esta ecuación diferencial ordinaria obtenemos:

$$\frac{dR_\tau(t)}{R_\tau(t)} = -(\alpha_\tau (1 - e^{-\beta_\tau t})) dt$$

$$\int_{\tau}^t \frac{dR_{\tau}(t)}{R_{\tau}(t)} = \int_{\tau}^t -(\alpha_{\tau}(1 - e^{-\beta_{\tau}t}))dt$$

$$\ln R_{\tau}(t) \Big|_{\tau}^t = \ln \frac{R_{\tau}(t)}{R_{\tau}(0)} = - \int_{\tau}^t (\alpha_{\tau}(1 - e^{-\beta_{\tau}t}))dt \quad (7)$$

con las siguientes condiciones de contorno:

- Si $t=0$, entonces $R_{\tau}(0) = K_{\tau}$. En el momento en el que se produce la catástrofe, todos los siniestros y, por tanto, la cuantía total de la catástrofe, está pendiente de declarar.
- Si $t \rightarrow \infty$, entonces $R_{\tau}(t) = 0$. Transcurrido un periodo de tiempo lo suficientemente amplio, todos los daños habrán sido declarados y no quedará ningún siniestro pendiente de declarar.

Entonces, haciendo el cambio de variable $t - \tau = s$ en la integral de la ecuación (7), y teniendo en cuenta las condiciones de contorno que acabamos de definir, la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t para la catástrofe considerada resulta:

$$R_{\tau}(t) = K_{\tau} e^{-\alpha_{\tau}(t-\tau)} e^{\frac{\alpha_{\tau}}{\beta_{\tau}}(1 - e^{-\beta_{\tau}(t-\tau)})} \quad (8)$$

Para reflejar el comportamiento irregular de las declaraciones de siniestros en el tiempo, introducimos un proceso de Wiener (movimiento Browniano) en la ecuación (6) (Ikeda et al., 1989).

Definición 1. W_t es un proceso de Wiener si satisface:

- (1) $\{W_t\}$ es continuo y $W_0 = 0$.
- (2) Para un t dado, $W_t \approx N(0, t)$.
- (3) Para s y t dados, $W_{s+t} - W_s \approx N(0, t)$.

Definición 2. Hacemos que X_t sea un proceso estocástico. X_t es llamado proceso Gaussiano si $X_t \approx N(\mu(t), \lambda(t))$. Entonces W_t es un proceso Gaussiano.

La irregularidad en el proceso de declaración de siniestros depende de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, esto es, mientras hay muchos siniestros pendientes de declarar, la irregularidad de las declaraciones es elevada, sin embargo ésta decrece cuando la cuantía de siniestros pendiente de declarar también lo hace. Para reflejar este comportamiento, añadimos en la ecuación (6) un proceso de Wiener con intensidad $\sigma_{\tau} R_{\tau}(t)$, lo cual se conoce con el nombre de movimiento Browniano geométrico, dando lugar a la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dR_{\tau}(t) = -(\alpha_{\tau}(1 - e^{-\beta_{\tau}t}))R_{\tau}(t)dt + \sigma_{\tau}R_{\tau}(t)dW_t \quad (9)$$

donde el término $(\alpha_{\tau}(1 - e^{-\beta_{\tau}t}))$ representa la tendencia del proceso, σ_{τ} es un valor constante que simboliza la volatilidad en el ritmo de las declaraciones y W_t es un proceso de Wiener estándar asociado a la catástrofe ocurrida en el momento τ .

Para resolver la ecuación (9) necesitamos aplicar el cálculo de Itô, para lo cual definimos en primer lugar lo que se conoce como proceso de Itô (Arnold, 1974).

Definición 3. Hacemos que Z_t es un proceso aleatorio gobernado por la siguiente ecuación:

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s \quad (10)$$

Entonces, Z_t es un proceso de Itô si:

$$(1) \int_0^t |a_s| ds < \infty \text{ y } \int_0^t (b_s)^2 dW_s < \infty$$

(2) W_t es un proceso de Wiener.

(3) La integral $\int_0^t b_s dW_s$ puede expresarse como sigue:

Para cada $n > 0$, tomamos la siguiente partición del intervalo $[0, t]$, $\pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t\}$

donde $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$. Entonces, la integral es:

$$\int_0^t b_s dW_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\pi_n} b_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

(4) La siguiente ecuación diferencial estocástica es una forma equivalente de la ecuación (10):

$$dZ_t = a_t dt + b_t dW_t \quad (11)$$

Corolario 1. $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(dW_t)^2}{dt} = 1$

A partir de esta definición, suponemos que Z_t es un proceso de Itô de la forma dada en la ecuación (11) y que $f(x)$ es una función dos veces diferenciable. Entonces, construimos un polinomio de Taylor de la función $f(Z_t)$ y detenemos su desarrollo en $o(dt)$,

$$\begin{aligned} df(Z_t) &= f'(Z_t) dZ_t + \frac{f''(Z_t)}{2} (dZ_t)^2 + \dots \\ &= f'(Z_t) (a_t dt + b_t dW_t) + \frac{f''(Z_t)}{2} (a_t dt + b_t dW_t)^2 + \dots \\ &= f'(Z_t) (a_t dt + b_t dW_t) + \frac{f''(Z_t)}{2} (a_t^2 (dt)^2 + b_t^2 (dW_t)^2 + a_t b_t dt dW_t) + \dots \\ &= f'(Z_t) (a_t dt + b_t dW_t) + \frac{f''(Z_t)}{2} (b_t^2 (dW_t)^2) + o(dt) \\ &= \left(f'(Z_t) a_t + \frac{f''(Z_t)}{2} b_t^2 \right) dt + f'(Z_t) b_t dW_t \end{aligned} \quad (12)$$

A continuación aplicamos el resultado obtenido en (12), con $f(Z_t) = \ln Z_t$, al proceso de Itô de nuestro modelo, de forma que, $Z_t = R_\tau(t)$, $a_t = -\alpha_\tau (1 - e^{-\beta_\tau t}) R_\tau(t)$ y $b_t = \sigma_\tau R_\tau(t)$:

$$\begin{aligned} d(\ln R_\tau(t)) &= \left(\frac{1}{R_\tau(t)} (-\alpha_\tau (1 - e^{-\beta_\tau t}) R_\tau(t)) - \frac{1}{2(R_\tau(t))^2} \sigma_\tau^2 (R_\tau(t))^2 \right) dt + \frac{1}{R_\tau(t)} \sigma_\tau R_\tau(t) dW_t \\ &= - \left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right) dt + \alpha_\tau e^{-\beta_\tau t} dt + \sigma_\tau dW_t \end{aligned} \quad (13)$$

Integrando de 0 a t ambos lados de la ecuación (13),

$$\begin{aligned} \int_\tau^t d(\ln R_\tau(t)) &= - \int_\tau^t \left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right) dt + \alpha_\tau \int_\tau^t e^{-\beta_\tau t} dt + \sigma_\tau \int_\tau^t dW_t \\ \ln R_\tau(t) \Big|_\tau^t &= \ln \frac{R_\tau(t)}{R_\tau(\tau)} = - \int_\tau^t \left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right) dt + \alpha_\tau \int_\tau^t e^{-\beta_\tau t} dt + \sigma_\tau \int_\tau^t dW_t \end{aligned} \quad (14)$$

y haciendo el cambio de variable $t - \tau = s$ en las integrales de la ecuación (14), se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln \frac{R_\tau(t)}{R_\tau(0)} &= - \int_0^{t-\tau} \left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right) ds + \alpha_\tau \int_0^{t-\tau} e^{-\beta_\tau s} ds + \sigma_\tau \int_0^{t-\tau} dW_s \\ &= - \left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right) (t - \tau) + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau (t-\tau)}) + \sigma_\tau W_{t-\tau} \end{aligned} \quad (15)$$

Entonces, considerando las condiciones de contorno definidas anteriormente y aplicando la función exponencial a la expresión (15), la cuantía de siniestros pendiente de declarar resulta:

$$R_\tau(t) = K_\tau e^{- \left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right) (t-\tau) + \sigma_\tau W_{t-\tau}} \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau (t-\tau)}) \quad (16)$$

Finalmente, substituyendo (16) en la ecuación (1), que establece la relación entre las variables $R_\tau(t)$ y $S_\tau(t)$, la cuantía declarada de siniestros hasta t , $S_\tau(t)$, se obtiene fácilmente como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declarar,

$$S_\tau(t) = K_\tau \left[1 - e^{- \left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right) (t-\tau) + \sigma_\tau W_{t-\tau}} \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau (t-\tau)}) \right] \quad (17)$$

sin necesidad de definir una ecuación diferencial estocástica para describir su dinámica.

Dado que la distribución de la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t , $R_\tau(t)$, depende de la distribución de probabilidad de la cuantía de la catástrofe, K_τ , si consideramos que dicha cuantía es un valor constante, la variable $R_\tau(t)$ seguirá una distribución lognormal, siendo su distribución normal asociada:

$$N \left(\ln K_\tau - \left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right) (t - \tau) + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau (t-\tau)}), \sigma_\tau \sqrt{t - \tau} \right) \quad (18)$$

La función $R_\tau(t)$ expresa la cuantía de los siniestros pendiente de declaración a lo largo de tiempo y como ya hemos indicado, parece lógico pensar que, una vez ocurrida la catástrofe, y especialmente en el momento de su ocurrencia, esta cuantía será muy elevada e irá disminuyendo con el tiempo a medida que se vayan declarando los siniestros asociados a la misma. Este comportamiento decreciente de la cuantía de siniestros pendiente de declarar queda perfectamente reflejado en el modelo aleatorio con tasa de declaración de siniestros constante desarrollado por Pérez-Fructuoso (2009), en el cual, la variable $R_\tau(t)$ es, en promedio, la función $R_\tau(t)$ obtenida en el modelo cierto en el que $\sigma_\tau = 0$, esto es:

$$E(R_\tau(t)) = K_\tau e^{-\alpha_\tau (t-\tau)} \quad (19)$$

Como es obvio, la representación gráfica de $E(R_\tau(t))$, considerando un valor constante para la variable cuantía total de la catástrofe K_τ , es la función de distribución complementaria de una distribución exponencial de parámetro α_τ .

La definición de este nuevo modelo con la tasa de declaración de siniestros asintótica, modifica la expresión de la cuantía de siniestros pendientes de declarar del modelo con tasa de declaración de siniestros constante, al multiplicarla por la función exponencial $e^{\frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau (t-\tau)})}$, lo que hace necesario el

estudio matemático de la función $R_\tau(t)$ en el nuevo modelo en cuanto al análisis del crecimiento y la curvatura de la misma, para determinar si su comportamiento se ajusta a la realidad que se pretende plasmar. Los resultados alcanzados con el estudio de la primera, segunda y tercera derivadas de la función $R_\tau(t)$ permiten concluir que dicha función cumple los requisitos de crecimiento y forma para representar la variable cuantía de siniestros pendiente de declaración. (La demostración se encuentra desarrollada en el Anexo 1 del presente trabajo).

3. Determinación del índice de pérdidas por catástrofes

Un índice de pérdidas por catástrofes se define como el cociente entre la cuantía total de pérdidas asociadas a una o varias catástrofes ocurridas a lo largo de un determinado periodo de tiempo, conocido como periodo de riesgo, $[0, T]$, y un valor constante cuya definición depende del tipo de índice utilizado. En el caso de los Cat bonds, los índices utilizados como desencadenantes del pago de las indemnizaciones se basan en la cuantía acumulada de las pérdidas hasta el vencimiento asociada a una única catástrofe. Por tanto,

$$LI(T') = \delta_\tau \frac{S_\tau(T')}{cte} = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_\tau = 0 \\ \frac{S_\tau(T')}{cte} & \text{si } \delta_\tau = 1 \end{cases} \quad (20)$$

siendo $LI(T')$ el valor del índice de pérdidas al vencimiento y δ_τ una variable de Bernoulli (o variable indicador) cuyo valor es 0, si no se produce la catástrofe cubierta en el bono en un momento $\tau \in [0, T]$, o 1 en otro caso.

Entonces, substituyendo en (20), $S_\tau(T')$ por su expresión dada en la ecuación (17), el valor de dicho índice al vencimiento resulta:

$$LI(T') = \delta_\tau \frac{S_\tau(T')}{cte} = \frac{\delta_\tau}{cte} K_\tau \left[1 - e^{-\left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2}\right)(T'-\tau) + \sigma_\tau W_{T'-\tau} - \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau(T'-\tau)})} \right] \quad (21)$$

Definimos la variable aleatoria condicionada $LI^*(T') = LI(T') / F_t$ que representa la cuantía total de las pérdidas asociadas a la catástrofe que incorpora la información disponible sobre las declaraciones de siniestros realizadas hasta el momento $t \in [\tau, T']$ dada por la filtración F_t .

Para obtener $LI^*(T') = LI(T') / F_t$, calculamos en primer lugar la cuantía total de declaraciones de pérdidas en cualquier momento $t \in [\tau, T']$, $LI(t)$, que es el condicionante de $LI(T')$ (es decir $LI(t) \cong F_t$) resultando:

$$LI(t) = \delta_\tau \frac{S_\tau(t)}{cte} = \frac{\delta_\tau}{cte} K_\tau \left[1 - e^{-\left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2}\right)(t-\tau) + \sigma_\tau W_{t-\tau} - \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau(t-\tau)})} \right] \quad (22)$$

Determinada $LI(t)$, se incorpora en la variable $LI(T')$ dando lugar al siguiente valor del índice condicionado para cualquier expresión funcional de la tasa de declaración de siniestros:

$$LI^*(T') = \frac{(\delta_\tau / F_t)}{cte} \left[L(t) + \left(K_\tau / F_t \right) \left[1 - e^{-\left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2}\right)(T'-t) + \sigma_\tau W_{T'-t} - \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau(T'-t)})} \right] e^{-\left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2}\right)(t-\tau) + \sigma_\tau W_{t-\tau} - \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau(t-\tau)})} \right] \quad (23)$$

Calculado de esta forma, el índice de pérdidas permite determinar el precio del derivado sobre catástrofes en un momento t de su periodo de negociación aplicando la teoría general de valoración de opciones.

4. Ejemplos de valoración de derivados sobre catástrofes

4.1. Valoración de un *Cat bond* cupón cero

Siguiendo a Loubergé et al., 1999 y a Pérez-Fructuoso, 2008, consideramos un bono cupón cero con valor nominal N , emitido en $t=0$ y con vencimiento $t=T'$. El resultado del bono al vencimiento depende de la relación que se produzca en ese momento entre el valor del índice de pérdidas definido en la sección (x), $LI(T')$, y un valor C desencadenante especificado en el contrato. De esta forma, si $LI(T') \leq C$ el resultado del bono es N , y si $LI(T') > C$ el resultado del bono es $N - [LI^*(T') - C]$.

Entonces, denotando por $B(T')$ el valor del bono al vencimiento, se derivan tres posibles escenarios:

- Si $LI(T') \leq C$, las pérdidas catastróficas recogidas en el índice no superan el valor desencadenante especificado en la emisión. Por tanto, $B(T') = N$ y los inversores recuperan el principal completo en el momento del vencimiento.
- Si $C < LI(T') < C + N$ los inversores pierden parte del principal que se destina a cubrir el exceso de pérdidas recogidas en el índice por encima del desencadenante y por tanto $B(T') = N - [LI(T') - C] \geq 0$.
- Finalmente, si $LI(T') \geq C + N$ los inversores pierden el principal completo y el valor del bono al vencimiento es obviamente nulo ($B(T') = 0$).

Estas expresiones llevan fácilmente a escribir el valor del bono al vencimiento como,

$$B(T') = N - \max(0, LI(T') - C) + \max(0, LI(T') - (C + N)) \quad (24)$$

el perfil de beneficios generados por la compra de un *call Spread inversa* (es decir, la combinación de una posición larga en bonos cupón cero libre de riesgo, una posición corta en una opción de compra sobre catástrofes con precio de ejercicio C , y una posición larga en una opción de compra sobre catástrofes con precio de ejercicio $N + C$).

Entonces, bajo una aproximación neutral al riesgo, y suponiendo un tipo de interés r constante a lo largo del intervalo $[0, T']$, el precio del bono en cualquier momento t puede obtenerse fácilmente como una martingala (es decir, como el valor actual del precio del bono al vencimiento bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo Q):

$$B(t) = e^{-r(T'-t)} E_Q[B(T') | F_t] \quad (25)$$

siendo F_t la información disponible sobre declaraciones de siniestros en t .

Bajo estas hipótesis, la ecuación (22) puede escribirse como:

$$B(t) = N e^{-r(T'-t)} - e^{-r(T'-t)} E_Q \left[\max(0, LI^*(T') - C) - \max(0, LI^*(T') - (C + N)) \right] \quad (26)$$

cuya solución explícita se obtiene fácilmente aplicando el modelo de valoración de opciones de Black-Scholes,

$$B(t) = N \times e^{-r(T'-t)} \times \left[1 - N(d_2') \right] - LI^*(T') \times \left[N(d_1) - N(d_1') \right] + C \times e^{-r(T'-t)} \times \left[N(d_2) - N(d_2') \right] \quad (27)$$

con,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{LI^*(T^i)}{C} + \left(r + \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right) \times (T^i - t)}{\sigma_\tau \times \sqrt{T^i - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_\tau \times \sqrt{T^i - t}$$

y,

$$d_1' = \frac{\ln \frac{LI^*(T^i)}{C+N} + \left(r + \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right) \times (T^i - t)}{\sigma_\tau \times \sqrt{T^i - t}}, \quad d_2' = d_1' - \sigma_\tau \times \sqrt{T^i - t}$$

4.2. Valoración de una opción call spread sobre catástrofes

El valor al vencimiento de una opción *call spread* sobre catástrofes viene dado por la siguiente expresión,

$$CS(T^i) = \min\{\max\{LI(T^i) - X; 0\}; Y - X\} \quad (28)$$

donde X es el valor del índice de pérdidas de ejercicio de la posición larga e Y es el índice de pérdidas de ejercicio de la posición corta, con $X < Y$.

Sea (Ω, F_t, P) un espacio de probabilidad que representa la incertidumbre del mercado en el que se negocian las opciones sobre catástrofes, provisto de una filtración $(F_t)_{t \geq 0}$ que se interpreta financieramente como la información disponible en el momento t .

El mercado se supone perfecto y se asume la hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje; esto supone que existe una medida de probabilidad neutral al riesgo Q , equivalente a P , bajo la cual, el precio de cualquier activo es la esperanza matemática actualizada de su valor al vencimiento.

Finalmente, se considera que las opciones son activos realizables, esto es, existe un número suficiente de activos negociables en relación al número de fuentes de riesgo que legitima la existencia de un único precio de arbitraje.

Bajo estas hipótesis, el precio de la opción en t viene dado por la siguiente expresión,

$$CS(t) = e^{-r(T^i-t)} E_Q \{CS(T^i) | F_t\} \quad (29)$$

donde $CS(T^i) | F_t$ es el valor de la opción al vencimiento que incorpora la información disponible sobre las declaraciones de siniestros en $[0, t] \subset [0, T^i]$ asociadas a la catástrofe ocurrida en el momento τ y $e^{-r(T^i-t)}$ es el factor de actualización al tanto de interés r libre de riesgo.

Entonces, el valor de la opción *call spread* en T^i que incorpora, a través de la filtración F_t , la información disponible sobre las declaraciones de siniestros hasta t , $CS(T^i) | F_t$, de la catástrofe ocurrida en τ , se obtiene, substituyendo en la expresión (28) la variable $LI(T^i)$ por la variable aleatoria condicionada $LI^*(T^i)$, como sigue,

$$CS(T^i) | F_t = \min\{\max\{LI^*(T^i) - X; 0\}; Y - X\} \quad (30)$$

donde $LI^*(T^i) = L(t) + LI'(T^i)$ siendo $L(t)$ un valor cierto que considera las pérdidas declaradas hasta t y valoradas en ese momento y $LI'(T^i)$ es un valor aleatorio que considera las declaraciones de siniestros que se producen desde t y hasta T^i .

Operando en la ecuación (30) resulta:

$$\begin{aligned}
CS(T^*)|F_t &= \min\{\max\{L(t) + LI'(T^*) - X; 0\}; Y - X\} = \\
&= \min\{L(t) - X + \max\{LI'(T^*); X - L(t)\}; Y - X\} = \\
&= L(t) - X + \min\{\max\{LI'(T^*); X - L(t)\}; Y - L(t)\}
\end{aligned} \tag{31}$$

En el momento del vencimiento de la opción *call spread* pueden darse las siguientes situaciones:

- Si $LI^*(T^*) \leq X$, $L(t) + LI'(T^*) \leq X$ o bien $LI'(T^*) \leq X - L(t)$, entonces:

$$\max\{LI'(T^*); X - L(t)\} = X - L(t)$$

Substituyendo este resultado en la ecuación (31), resulta,

$$CS(T^*)|F_t = L(t) - X + \min\{X - L(t); Y - L(t)\}$$

y como el precio de ejercicio de la posición larga es menor que el precio de ejercicio de la posición corta, $X < Y$, tenemos,

$$\min\{X - L(t); Y - L(t)\} = X - L(t)$$

resultando que $CS(T^*)|F_t = 0$.

- Si $LI^*(T^*) > X$, $L(t) + LI'(T^*) > X$ o bien $LI'(T^*) > X - L(t)$, entonces:

$$\max\{LI'(T^*); X - L(t)\} = LI'(T^*)$$

Substituyendo este resultado en la ecuación (31), y operando, resulta:

$$\begin{aligned}
CS(T^*)|F_t &= L(t) - X + \min\{LI'(T^*); Y - L(t)\} = \\
&= \min\{L(t) + LI'(T^*) - X; Y - X\}
\end{aligned} \tag{32}$$

- Si $LI^*(T^*) < Y$, entonces a partir de la expresión (32) tenemos:

$$CS(T^*)|F_t = L(t) + LI'(T^*) - X \tag{33}$$

- Si $LI^*(T^*) > Y$, entonces a partir de la expresión (32) resulta:

$$CS(T^*)|F_t = Y - X \tag{34}$$

En general, el valor de liquidación de una opción *call spread* sobre catástrofes, que incorpora la historia sobre las declaraciones de siniestros hasta t , es:

$$CS(T^*)|F_t = \begin{cases} 0 & \text{si } LI'(T^*) \leq X - L(t) \\ L(t) + LI'(T^*) - X & \text{si } LI'(T^*) > X - L(t) \text{ y } LI'(T^*) < Y \\ Y - X & \text{si } LI'(T^*) > X - L(t) \text{ y } LI'(T^*) > Y \end{cases} \tag{35}$$

El precio de la opción *call spread* en t , lo obtenemos como la esperanza matemática actualizada de la expresión (35):

$$\begin{aligned}
CS(t) &= e^{-r(T^*-t)} E_Q \{CS(T^*)|F_t\} = \\
&= e^{-r(T^*-t)} \begin{cases} 0 & \text{si } LI'(T^*) \leq X - L(t) \\ L(t) - X + E_Q \{LI'(T^*)\} & \text{si } LI'(T^*) > X - L(t) \text{ y } LI'(T^*) < Y \\ Y - X & \text{si } LI'(T^*) > X - L(t) \text{ y } LI'(T^*) > Y \end{cases}
\end{aligned} \tag{36}$$

5. Estimación de los parámetros del modelo y validación

En esta sección desarrollamos un método para estimar la tasa de declaración de siniestros constante, la volatilidad incorporada mediante el proceso de Wiener y el parámetro β del modelo asintótico. Para ello, disponemos de datos, obtenidos a través del Departamento Técnico y de Reaseguro del Consorcio de Compensación de Seguros, sobre el porcentaje de siniestros pendiente de declarar acumulado semanalmente asociado a seis inundaciones ocurridas en distintas regiones de España propensas a la ocurrencia de este tipo de eventos: Alcira (01/10/1991), San Sebastián (23/06/1992), Barcelona (14/09/1999), Zaragoza (20/10/2000), Valencia (20/10/2000) y Murcia (20/10/2000).

Tabla 1. Cuantía de siniestros pendiente de declarar (expresada en %)

Semana	Alcira	San Sebastián	Barcelona	Zaragoza	Valencia	Murcia
0	100	100	100	100	100	100
1	84,94	88,08	90,68	60,11	97,54	88,46
2	53,65	36,04	68,38	56,91	80,18	75,55
3	34,96	23,67	50,68	38,3	60,15	48,7
4	24,05	16,68	41,42	29,79	43,16	31,13
5	18,86	12,29	31,58	23,4	31,96	21,41
6	13,36	9,94	25,43	19,15	27,55	15,78
7	10,53	8,72	19,56	18,09	19,54	11,27
8	8,04	7,76	16,68	15,43	15,29	8,71
9	6,94	6,8	13,28	15,43	14,76	8,24
10	5,23	5,78	10,54	10,64	14,7	6,57
11	4,08	5,18	8,15	6,91	11,06	5,36
12	3,71	4,33	6,8	3,72	8,46	4
13	3,56	3,45	6,13	3,72	6,98	3,38
14	2,6	2,69	3,41	2,66	6,21	2,6
15	1,75	1,81	3,41	2,66	5,17	2,8
16	1,3	1,59	2,61	1,6	4,22	2,29
17	0,77	1,39	1,81	1,6	3,5	2,25
18	0,29	1,16	1,26	1,6	2,72	2,14
19	0,0	0,96	0,56	0,0	2,26	1,67
20		0,76	0,0		1,88	1,28
21		0,45			1,69	1,09
22		0,28			1,61	0,93
23		0,2			0,9	0,66
24		0,17			0,54	0,66
25		0,11			0,36	0,62
26		0,06			0,19	0,16
27		0,0			0,0	0,0

La ecuación fundamental del modelo asintótico propuesto viene dada por la expresión (16), de forma que $\ln R_\tau(t)$ sigue el proceso Gaussiano definido en (18). Entonces, considerando las propiedades de la distribución normal así como las características de los datos disponibles, es posible obtener una expresión más apropiada para calcular los estimadores de los parámetros α_τ y σ_τ , a partir de la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t y en $t-1$, operando como sigue:

$$\frac{R_\tau(t)}{R_\tau(t-1)} = \frac{K_\tau e^{-\left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2}\right)(t-\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau}(1-e^{-\beta_\tau(t-\tau)}) + \sigma_\tau W_{t-\tau}}}{K_\tau e^{-\left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2}\right)(t-\tau-1) + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau}(1-e^{-\beta_\tau(t-\tau-1)}) + \sigma_\tau W_{t-\tau-1}}} = e^{-\left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} - \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau}(e^{\beta_\tau} - 1)e^{-\beta_\tau}\right) + \sigma_\tau W_t} \tag{37}$$

Esto implica que $\frac{R_\tau(t)}{R_\tau(t-1)}$ se distribuye lognormalmente, con parámetros de tendencia y dispersión de la distribución normal asociada,

$$\ln \frac{R_\tau(t)}{R_\tau(t-1)} \sim N \left(- \left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau}) e^{-\beta_\tau t} \right); \sigma_\tau^2 \right) \quad (38)$$

de forma que:

$$X(t) = - \ln \frac{R_\tau(t)}{R_\tau(t-1)} \sim N \left(\left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau}) e^{-\beta_\tau t} \right); \sigma_\tau^2 \right) \quad (39)$$

Para estimar la varianza, σ_τ^2 , utilizamos la cuasi-varianza, S^2 , estimador insesgado de la primera, cuya forma explícita representamos por la siguiente expresión:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (X(t) - \bar{X})^2 \quad (40)$$

Por otra parte, para estimar la media de $X(t)$ no podemos utilizar el método de máximo verosimilitud porque dicha media no es un valor constante. $X(t)$ es un proceso Gaussiano y su media es la función dependiente del tiempo (*time-dependent function*):

$$E(X(t)|t) = \alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau}) e^{-\beta_\tau (t-\tau)} \quad (41)$$

La estimación de los parámetros α_τ y β_τ se va a realizar aplicando la metodología de mínimos cuadrados ordinarios, esto es, los estimadores serán aquellos valores de α_τ y β_τ que minimizan la diferencia entre la media y todas las observaciones disponibles.

Entonces, el objetivo será minimizar la función $f(\alpha_\tau, \beta_\tau, \sigma_\tau)$ definida como sigue:

$$\min_{(\alpha_\tau, \beta_\tau, \sigma_\tau)} f(\alpha_\tau, \beta_\tau, \sigma_\tau) = \min_{(\alpha_\tau, \beta_\tau, \sigma_\tau)} \sum_{t=1}^n \left[X(t) - \left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau}) e^{-\beta_\tau t} \right) \right]^2 \quad (42)$$

Teniendo en cuenta que el parámetro σ_τ^2 ha sido estimado a partir la cuasi-varianza, substituímos σ_τ^2 por S^2 en la ecuación de forma que la función a minimizar resulta:

$$\min_{(\alpha_\tau, \beta_\tau)} f(\alpha_\tau, \beta_\tau) = \min_{(\alpha_\tau, \beta_\tau)} \sum_{t=1}^n \left[\left(X(t) - \frac{S^2}{2} \right) - \left(\alpha_\tau + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau}) e^{-\beta_\tau t} \right) \right]^2 \quad (43)$$

A continuación, para simplificar los cálculos que se desarrollarán posteriormente, definimos la función $z_t = 1 + \frac{1}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau}) e^{-\beta_\tau t}$ y calculamos su primera derivada:

$$\begin{aligned} z_t' &= \frac{\partial z_t}{\partial \beta_\tau} = - \frac{1}{\beta_\tau^2} (1 - e^{-\beta_\tau}) e^{-\beta_\tau t} - \frac{1}{\beta_\tau} e^{-\beta_\tau t} - \frac{t}{\beta_\tau^2} (1 - e^{-\beta_\tau}) e^{-\beta_\tau t} \\ &= - \frac{e^{-\beta_\tau t}}{\beta_\tau} \left(\frac{1}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau}) + e^{-\beta_\tau} + t (1 - e^{-\beta_\tau}) \right) \end{aligned} \quad (44)$$

Con esta notación, la función a minimizar es:

$$\min_{(\alpha_\tau, \beta_\tau)} f(\alpha_\tau, \beta_\tau) = \min_{(\alpha_\tau, \beta_\tau)} \sum_{t=1}^n \left[\left(X(t) - \frac{S^2}{2} \right) - 2 \left(X(t) - \frac{S^2}{2} \right) \alpha_\tau z_t + \alpha_\tau^2 z_t^2 \right]^2 \quad (45)$$

Derivamos respecto a cada uno de los parámetros,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}(\alpha_\tau, \beta_\tau)}{\partial \alpha_\tau} &= \sum_{i=1}^n \left[-2 \left(X(t) - \frac{S^2}{2} \right) z_t + 2\alpha_\tau z_t^2 \right] \\ \frac{\partial \mathcal{J}(\alpha_\tau, \beta_\tau)}{\partial \beta_\tau} &= \sum_{i=1}^n \left[-2 \left(X(t) - \frac{S^2}{2} \right) \alpha_\tau z_t + 2\alpha_\tau^2 z_t z_t' \right] \end{aligned} \quad (46)$$

e igualamos a cero cada una de las funciones resultantes para obtener el mínimo en cada caso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}(\alpha_\tau, \beta_\tau)}{\partial \alpha_\tau} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[- \left(X(t) - \frac{S^2}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{\beta_\tau} (1 - e^{\beta_\tau}) e^{-\beta_\tau t} \right) + \alpha_\tau \left(1 + \frac{1}{\beta_\tau} (1 - e^{\beta_\tau}) e^{-\beta_\tau t} \right)^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{J}(\alpha_\tau, \beta_\tau)}{\partial \beta_\tau} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[- \left(X(t) - \frac{S^2}{2} \right) \alpha_\tau + \alpha_\tau^2 \left(1 + \frac{1}{\beta_\tau} (1 - e^{\beta_\tau}) e^{-\beta_\tau t} \right) \right] \dots \\ &\dots \left[- \frac{e^{-\beta_\tau}}{\beta_\tau} \left(\frac{1}{\beta_\tau} (1 - e^{\beta_\tau}) + e^{-\beta_\tau} + t(1 - e^{\beta_\tau}) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Para resolver estas dos ecuaciones no lineales utilizamos la rutina *fsolve* del programa Matlab. Esta rutina encuentra la solución $(\alpha_\tau^*, \beta_\tau^*)$ para el sistema de ecuaciones anterior, utilizando un método numérico que se inicia con una semilla $((\alpha_\tau)_0, (\beta_\tau)_0)$ que nosotros introducimos en el programa.

Para definir esta semilla tenemos en cuenta (α_τ^*) que debe ser positivo y con un valor relativamente cercano al obtenido en el modelo original, de forma que $0,1 \leq \alpha_\tau^* \leq 0,8$. Por otro lado, (β_τ^*) también debe ser positivo y no muy elevado porque en otro caso la función dada por la ecuación (5) sería un valor constante. Por tanto, $0,1 \leq \beta_\tau^* \leq 5$. Considerando estos dos factores, definimos el dominio de nuestra semilla como:

$$((\alpha_\tau)_0, (\beta_\tau)_0) \in (0,1;0,8) \times (0,1;5)$$

Para garantizar que los valores obtenidos minimizan la función $f(\alpha_\tau, \beta_\tau)$ independientemente de la semilla seleccionada, introduciremos en la rutina de Matlab diferentes semillas (pertenecientes al dominio).

Los resultados de la estimación de los parámetros y el proceso Gaussiano seguido por $X(t)$ en cada una de las series de datos se muestran en las Tablas 2 y 3 a continuación:

Tabla 2: Estimadores para el modelo asintótico

zona	$(\hat{\alpha}_\tau)_{MCO}$	$(\hat{\beta}_\tau)_{MCO}$	$\hat{\sigma}_\tau^2$
Alcira	0,3113665692	2,4706387578	0,0422098269
San Sebastián	0,2714320247	3,5470277486	0,28533003
Barcelona	0,2691828454	1,2703570356	0,0311010319
Zaragoza	0,2080182736	∞^*	0,0434054683
Valencia	0,238730593	1,0160837493	0,0257693877
Murcia	0,2191557622	1,5431850993	0,0687540979

* La inundación ocurrida en Zaragoza presenta unas características diferentes al resto de inundaciones analizadas. El proceso de declaración de siniestros se vio alterado por la ocurrencia, inmediatamente después de la catástrofe original, de otras inundaciones de menor intensidad.

Esta circunstancias condicionó los datos disponibles dando lugar a mayores errores en las estimaciones realizadas sobre los datos reales. Por esta razón no ha sido posible encontrar el valor del

parámetro cuando β_τ de forma que al calcular $(\hat{\alpha}_\tau)_{MCO}$ y $(\hat{\beta}_\tau)_{MCO}$ para diferentes semillas, obtenemos siempre el mismo valor de $(\hat{\alpha}_\tau)_{MCO}$ (las diferencias tienen un orden de 10^{-4}) para diferentes valores de $(\hat{\beta}_\tau)_{MCO}$ ($\hat{\beta}_\tau \in (70,400)$). Esto significa que el parámetro β_τ no influye en los resultados, y por tanto asumimos que $\alpha_\tau(t) = \alpha_\tau$.

Tabla 3. Proceso Gaussiano seguido por $R_\tau(t)$ en el modelo asintótico

zona	Proceso
Alcira	$N(\mu(t); 0,0422098269)$ con $\mu(t) = 0,332471483 - 1,364869806 \exp(-2,470638759t)$
San Sebastián	$N(\mu(t); 0,035160532)$ con $\mu(t) = 0,289012291 - 2,579617108 \exp(-3,547027848t)$
Barcelona	$N(\mu(t); 0,031101032)$ con $\mu(t) = 0,284733359 - 0,542902574 \exp(-1,270357621t)$
Zaragoza	$N(0,229721008; 0,043405468)$
Valencia	$N(\mu(t); 0,025769388)$ con $\mu(t) = 0,251615287 - 0,41406841 \exp(-1,016083812t)$
Murcia	$N(\mu(t); 0,068754098)$ con $\mu(t) = 0,253532811 - 0,522540881 \exp(-1,543185099t)$

Para analizar los valores derivados de la estimación, calculamos las predicciones del porcentaje de siniestros pendientes de declarar en el modelo propuesto a partir de la media de su distribución,

$$E(R_\tau(t)) = K_\tau e^{\left(-\alpha_\tau(t-\tau) - \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau(t-\tau)}) \right)} \tag{48}$$

y representamos gráficamente los datos estimados y los datos reales para compararlos (ver Tabla 4 y Figura 1 a continuación).

Tabla 4. Cuantía de siniestros pendiente de declarar estimada con el modelo asintótico (expresada en %)

zona	Alcira	San Sebastián	Barcelona	Zaragoza	Valencia	Murcia
0	100	100	100	100	100	100
1	82,20180146	82,1097932	88,97870205	81,21921949	91,49976859	89,80863036
2	60,79838805	62,72539648	70,95177017	65,96561615	76,08643443	73,87602922
3	44,5682225	47,8177101	54,86243769	53,57675857	61,11660214	59,64033895
4	32,64606158	36,45088827	42,05667248	43,51462513	48,4806299	47,95514893
5	23,91159636	27,78604328	32,16187772	35,3422389	38,28308412	38,52638367
6	17,51394592	21,18094234	24,57831946	28,70469058	30,18090658	30,94580044
7	12,82800852	16,14595908	18,77932426	23,31372565	23,77931954	24,85582606
8	9,395815029	12,3078563	14,34777088	18,93522601	18,73152282	19,96416038
9	6,881920887	9,382120067	10,96181234	15,37904277	14,75410631	16,03515354
10	5,040630848	7,151869083	8,374877361	12,4907385	11,62091917	12,87938215
11	3,691986549	5,451777532	6,398438998	10,14488032	9,153003274	10,34467619
12	2,704178324	4,155819676	4,888430744	8,239592615	7,209168054	8,308808794
13	1,980662797	3,167927723	3,734778578	6,692132811	5,678140052	6,673606986
14	1,450727226	2,414870432	2,85338412	5,435298036	4,472257907	5,360218447
15	1,062578389	1,840824575	2,179995603	4,414506642	3,522471635	4,305309236
16	0,778280583	1,403236824	1,665524381	3,585427839	2,774394029	3,458009744
17	0,570047983	1,069669327	1,27246654	2,912056506	2,185187803	2,777461672
18	0,417528985	0,815395127	0,972168953	2,365149566	1,721113023	2,230847773
19	0,305817157	0,621565186	0,742740531	1,920956017	1,355595169	1,791809348
20		0,473811122	0,567456403		1,067703419	1,439175178

21	0,361180105	0,840952091	1,155940611
22	0,275322935	0,662356611	0,928447569
23	0,209875121	0,521689981	0,745725932
24	0,159985097	0,410897139	0,598964533
25	0,121954575	0,3236337	0,481086277
26	0,092964399	0,254902655	0,386406862
27	0,070865562	0,200768225	0,310360678

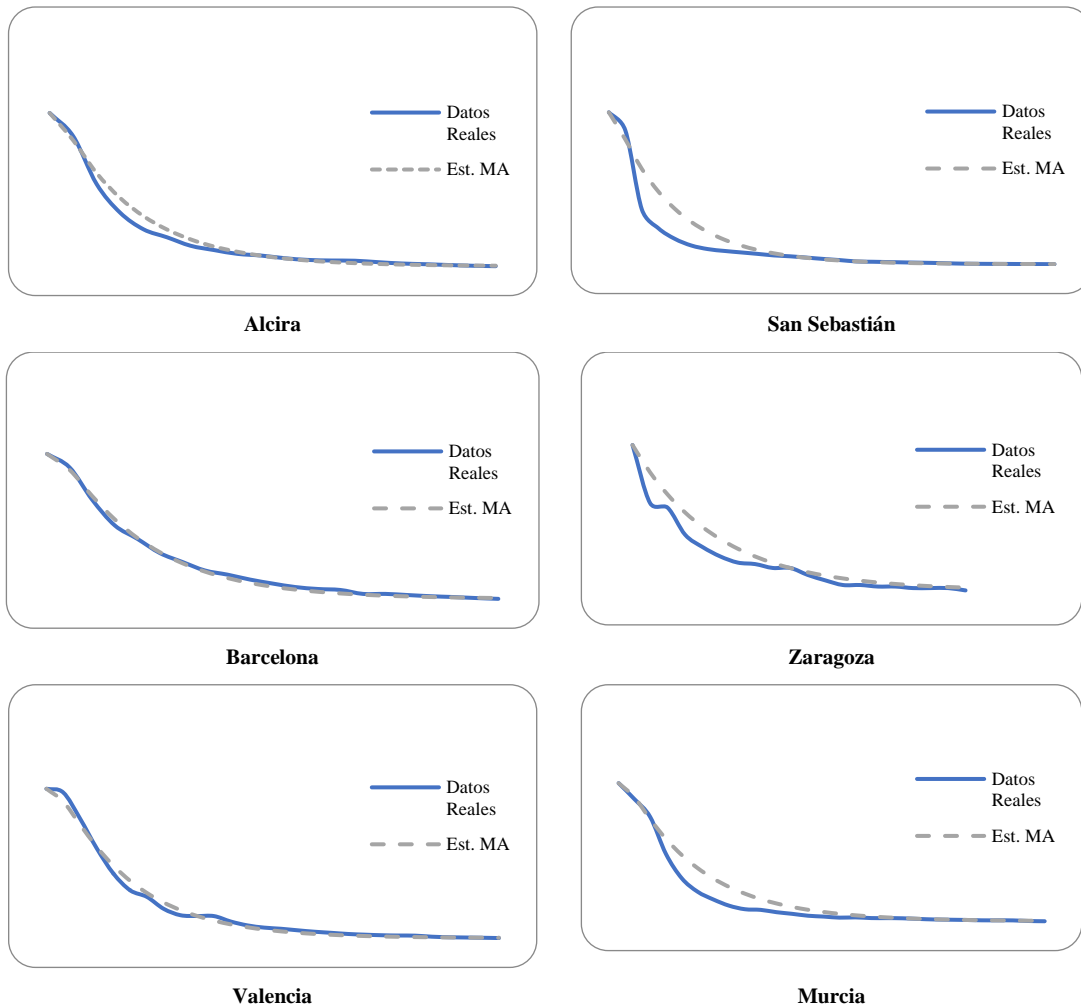


Figura 1. Datos reales y Datos estimados con el modelo asintótico.

Seguidamente calculamos la raíz cuadrada del error cuadrático medio para cada inundación, a partir de la siguiente expresión,

$$RECM = \sqrt{ECM} = \sqrt{\frac{\sum (\hat{R}_t(t) - R_t(t))^2}{n}} \quad (49)$$

donde $R_t(t)$ es el valor observado e $\hat{R}_t(t)$ es el valor estimado y cuyos resultados aparecen en la Tabla 5 a continuación:

Tabla 5. RECM modelo asintótico.

zona	RECM
Alcira	3,843048919
San Sebastián	8,9718583
Barcelona	1,738995354
Zaragoza	8,229290452
Valencia	2,648784428
Murcia	7,221859512

El valor reducido de este indicador hace pensar que las predicciones realizadas con el modelo asintótico son bastante fiables. Para confirmarlo se determinan el índice de Theil,

$$IT = \frac{\sqrt{\frac{\sum (\hat{R}_\tau(t) - R_\tau(t))^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\sum (\hat{R}_\tau(t))^2}{n} + \frac{\sum (R_\tau(t))^2}{n}}} \quad (50)$$

y la proporción de sesgo,

$$\text{Proporción de Sesgo} = \frac{(\overline{\hat{R}_\tau(t)} - \overline{R_\tau(t)})^2}{\frac{\sum (\hat{R}_\tau(t) - R_\tau(t))^2}{n}} \quad (51)$$

para cada una de las series, cuyos resultados vienen recogidos en las Tablas 6 y 7 siguientes:

Tabla 6. Índice de Theil.

zona	Índice
Alcira	0,071510838
San Sebastián	0,203414131
Barcelona	0,027435877
Zaragoza	0,14658209
Valencia	0,044089191
Murcia	0,13046931

Tabla 7. Proporción de sesgo.

zona	Proporción
Alcira	0,170250078
San Sebastián	0,18937281
Barcelona	0,100777592
Zaragoza	0,517067186
Valencia	0,006335501
Murcia	0,36667459

Los valores tanto del índice de Theil como de la proporción de sesgo, en todos los casos, están muy cercanos a cero, lo que permite concluir que las predicciones realizadas con el modelo asintótico son fiables.

Finalmente, para verificar la bondad del modelo presentado se realiza un contraste de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras independientes. Los resultados del contraste se muestran en la Tabla 8 a continuación:

Tabla 8. p-valores del contraste Kolmogorov-Smirnov.

zona	p-valor
Alcira	1
San Sebastián	1
Barcelona	0,938
Zaragoza	0,938
Valencia	0,819
Murcia	0,938

Los p-valores obtenidos para todas las series de datos analizadas permiten concluir que las dos muestras provienen de la misma distribución y por tanto que las variables $\ln \frac{R_\tau(t)}{R_\tau(t-1)}$ siguen la distribución normal definida por el modelo asintótico, esto es:

$$N\left(-\left(\alpha_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2} + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (1 - e^{-\beta_\tau})\right); \sigma_\tau^2\right) \quad (52)$$

En conclusión, el modelo asintótico presentado ajusta fielmente la realidad catastrófica que queremos representar.

6. Conclusiones

Este artículo desarrolla un proceso de cálculo del precio de los derivados sobre seguros basados en índices de pérdidas de la industria aseguradora como los Cat bonds o las opciones sobre riesgos catastróficos. El modelo continuo propuesto permite calcular fácilmente el índice de pérdidas desencadenante de este tipo de derivados. A diferencia de muchos de los modelos precedentes (ver por ejemplo, Cummins y Geman, 1995 o Geman y Yor, 1997), que asumen un crecimiento temporal de la cuantía declarada de siniestros y representan dicha evolución a través de un movimiento geométrico browniano, la hipótesis central del modelo aquí presentado es la definición de la dinámica de las declaraciones siniestralas basada en un crecimiento proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar. Esta cuantía es la variable fundamental en el proceso de formalización del modelo, cuya dinámica decreciente es la que modelamos a través de un proceso geométrico de Wiener. Una vez determinada esta variable, el total de declaraciones de siniestros se obtiene fácilmente como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declaración, eliminando de esa forma la necesidad de definir una ecuación diferencial estocástica para describir su dinámica. El índice de pérdidas catastróficas resulta de multiplicar la cuantía declarada de siniestros por una variable aleatoria dicotómica que indica si se ha producido o no la catástrofe.

La obtención de estas variables se ha realizado para una tasa de declaración de siniestros asintótica con el objetivo de realizar una representación lo más ajustada a la realidad de la evolución real de las declaraciones de siniestros en el tiempo.

En cuanto a la estimación de los parámetros del modelo se ha realizado aplicando una metodología de mínimos cuadrados ordinarios para obtener la tasa constante de declaración y el tiempo medio de declaración de siniestros. La estimación de la volatilidad incorporada por el proceso de Wiener se ha llevado a cabo a través de la cuasi-varianza. El contraste de los resultados obtenidos con el ajuste realizado a través del cálculo de la raíz cuadrada del error cuadrático medio, el índice de Theil y la proporción de sesgo concluye que el modelo aleatorio propuesto describe de forma adecuada la realidad que pretendemos representar. Finalmente, el contraste de Kolmogorov-Smirnov permite concluir que los datos reales de los que partimos provienen de la distribución normal seguida por el logaritmo de la cuantía de siniestros pendiente de declarar definida mediante un movimiento Browniano geométrico con tasa de declaración de siniestros asintótica.

Referencias bibliográficas

1. J. D. Cummins and H. Geman, Pricing Catastrophe Insurance Futures and Call Spreads: An Arbitrage Approach, *Journal of Fixed Income* **4** (1995) 46-57.
2. H. Geman, and M. Yor, Stochastic time changes in catastrophe option pricing, *Insurance: Mathematics and Economics* **21** (1997) 185-193.
3. K. Aase, An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* **24** (1999) 69-96.
4. K. Aase, A Markov model for the pricing of catastrophe insurance futures and spreads, *Journal of Risk and Insurance* **68**:1 (2001) 25-50.
5. P. Embrechts and S. Meister, Pricing insurance derivatives, the case of CAT futures in *Proceedings of the 1995 Bowles Symposium on Securitization of Insurance Risk* (Society of Actuaries; Atlanta, Georgia, 1997) pp. 15-26.
6. H. Loubergé, E. Kellezi and M. Gilli, Using Catastrophe-Linked Securities to Diversify Insurance Risk: A Financial Analysis of Cat Bonds, *Journal of Insurance Issues* **22**:2 (1999) 125-146.
7. S. H. Cox and H. Pedersen, Catastrophe Risk Bonds. *North American Actuarial Journal* **4** (4) (2000) 56-82.
8. Y. Baryshnikov, A. Mayo and D.R. Taylor, Pricing of Cat Bonds, *Working Paper*, Version October 3, 2001.
9. A. Muermann, Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivatives. *Working Paper Series The Wharton Financial Institutions Center*, 03-18 (The Wharton School, University of Pennsylvania, 2003).
10. K. Burnecki and G. Kukla, Pricing of zero-coupon and coupon cat bonds, *Applicationes Mathematicae*, **30** (2003), 315-324.
11. K. Burnecki, Pricing catastrophe bonds in a compound non-homogeneous Poisson model with left truncated loss distributions. Presentation Wroclaw University of Technology, 2005.
12. J. P. Lee and M. T. Yu, Pricing default-risky Cat bonds with moral hazard and basis risk. *Journal of Risk and Insurance* **69**:1 (2002) 25-44.
13. A. Alegre, M. J. Pérez-Fructuoso and P. Devolder, Modèles discrets d'options sur risques catastrophiques, *Belgian Actuarial Bulletin* **3** (2003) 28-32.
14. J. P. Lee and M. T. Yu, Valuation of catastrophe reinsurance with catastrophe bonds, *Insurance: Mathematics and Economics* **41**:2 (2007) 264-278.
15. M. Egami and V. Young, Indifference prices of structured catastrophe (CAT) bonds, *Insurance: Mathematics and Economics* **42** (2008) 771-778.
16. M. J. Pérez-Fructuoso, Modeling loss index trigger for Cat bonds: A continuous Approach, *Variance* **2**:2 (2008) 253-265.
17. M. J. Pérez-Fructuoso, Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS) a continuous model, *Asian-Pacific Journal of Risk and Insurance* **3**:2 (2009) 34-45.
18. F. Biagini, Y. Bregman and T. Meyer-Brandis, Pricing of catastrophe insurance options written on a loss index with reestimation, *Insurance: Mathematics and Economics* **43** (2008) 214-222.
19. A. J. A. Unger, Pricing index-based catastrophe bonds: Part 1. Formulation and discretization issues using a numerical PDE approach, *Computers & Geosciences* **36** (2010) 139-149.
20. P. Nowak and M. Romaniuk, Pricing and simulations of catastrophe Bonds, *Insurance: Mathematics and Economics* **52** (2013) 18-28.
21. M. Zong-Gang and M. Chao-Qun, Pricing catastrophe risk Bonds: a mixed approximation method, *Insurance: Mathematics and Economics* **52** (2013) 243-254.
22. V. S. Lai, M. Parcollet and B. F. Lamond, The valuation of catastrophe bonds with exposure to currency exchange risk, *International Review of Financial Analysis* **33** (2014) 243-252.
23. N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes* (North-Holland/Kodanska, 1989).
24. L. Arnold, *Stochastic differential equations: theory and applications* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974).

Anexo A : Análisis de las propiedades deseables de la función $R_\tau(t)$ para el modelo asintótico

Primera derivada de la función $R_\tau(t)$: estudio del crecimiento de $R_\tau(t)$

A partir de la expresión de la cuantía de los siniestros pendiente de declarar,

$$R_\tau(t) = K_\tau e^{-\alpha_\tau(t-\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau}(1-e^{-\beta_\tau(t-\tau)})}$$

definimos una nueva función $\varphi(t)$, tal que:

$$\varphi(t) = \frac{R_\tau(t)}{K_\tau} = e^{-\alpha_\tau(t-\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau}(1-e^{-\beta_\tau(t-\tau)})}$$

$\varphi(t)$ es una función exponencial y, por tanto, siempre toma valores estrictamente positivos y $0 < (1 - e^{-\beta_\tau(t-\tau)}) < 1$.

Para determinar el crecimiento (decrecimiento) de la función $\varphi(t)$, calculamos la primera derivada de la misma respecto a t y estudiamos su signo:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \left[e^{-\alpha_\tau(t-\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau}(1-e^{-\beta_\tau(t-\tau)})} \right] \left[(-\alpha_\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} (-e^{-\beta_\tau(t-\tau)}) (-\beta_\tau) \right] = \varphi(t) (-\alpha_\tau) (1 - e^{-\beta_\tau(t-\tau)}) < 0$$

Entonces, como $\varphi'(t) < 0, \forall t$, la función $\varphi(t)$ tiene un comportamiento decreciente para cualquier valor de t y por tanto, la función $R_\tau(t)$ es también decreciente para cualquier valor de t .

Segunda derivada de la función $R_\tau(t)$: estudio de la curvatura de $R_\tau(t)$

Para estudiar la curvatura de la función $j(t)$ calculamos, previamente, los posibles puntos de inflexión de dicha función.

La segunda derivada de la función $j(t)$ es:

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} = \left[e^{-\alpha_\tau(t-\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau}(1-e^{-\beta_\tau(t-\tau)})} \right] \left[\alpha_\tau e^{-\beta_\tau(t-\tau)} (2\alpha_\tau + \beta_\tau) + (-\alpha_\tau) (1 + e^{-2\beta_\tau(t-\tau)}) \right] = \\ &= \varphi(t) \left[\alpha_\tau e^{-\beta_\tau(t-\tau)} (2\alpha_\tau + \beta_\tau) - (\alpha_\tau)^2 (1 - e^{-2\beta_\tau(t-\tau)}) \right] \end{aligned}$$

Haciendo $\varphi''(t) = 0$, obtenemos,

$$e^{-\beta_\tau(t-\tau)} (2\alpha_\tau + \beta_\tau) - \alpha_\tau e^{-2\beta_\tau(t-\tau)} - \alpha_\tau = 0$$

y realizando el cambio de variable, $e^{-\beta_\tau(t-\tau)} = x$, la ecuación anterior puede expresarse como un polinomio de grado dos,

$$-\alpha_\tau x^2 + (2\alpha_\tau + \beta_\tau)x - \alpha_\tau = 0$$

cuyas raíces son:

$$x_1 = 1 + \frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau} - \sqrt{\frac{\beta_\tau}{\alpha_\tau} + \left(\frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau}\right)^2} \quad x_2 = 1 + \frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau} + \sqrt{\frac{\beta_\tau}{\alpha_\tau} + \left(\frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau}\right)^2}$$

Dado que $(t - \tau) \in [0, +\infty[$, entonces $x = e^{-\beta_\tau(t-\tau)} \in [0, 1]$ lo que lleva a rechazar la solución positiva de la raíz porque da lugar a valores de x que no pertenecen a su dominio.

Entonces, deshaciendo el cambio de variable en la solución del punto obtenida,

$$e^{-\beta_\tau(t-\tau)} = 1 + \frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau} - \sqrt{\frac{\beta_\tau}{\alpha_\tau} + \left(\frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau}\right)^2}$$

y aplicando logaritmos neperianos a ambos lados de la igualdad,

$$-\beta_\tau(t - \tau) = \ln \left(1 + \frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau} - \sqrt{\frac{\beta_\tau}{\alpha_\tau} + \left(\frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau}\right)^2} \right)$$

obtenemos un posible punto de inflexión de la función $\varphi(t)$:

$$t^* = t - \tau = -\frac{1}{\beta_\tau} \ln \left(1 + \frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau} - \sqrt{\frac{\beta_\tau}{\alpha_\tau} + \left(\frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau}\right)^2} \right)$$

Para comprobar la existencia del punto de inflexión en la función, debemos verificar si la tercera derivada se anula en el punto en que se anula la segunda derivada, esto es en t^* .

La segunda derivada de $\varphi(t)$ puede escribirse, alternativamente, como sigue,

$$\varphi''(t) = -\alpha_\tau \beta_\tau e^{-\beta_\tau(t-\tau)} \varphi(t) - \alpha_\tau (1 - e^{-\beta_\tau(t-\tau)}) \varphi'(t)$$

expresión a partir de la cual calculamos la tercera derivada, resultando:

$$\varphi'''(t) = -\alpha_\tau (\beta_\tau)^2 e^{-\beta_\tau(t-\tau)} \varphi(t) - 2\alpha_\tau \beta_\tau e^{-\beta_\tau(t-\tau)} \varphi'(t) - \alpha_\tau (1 - e^{-\beta_\tau(t-\tau)}) \varphi''(t)$$

Sustituyendo el punto t^* en la expresión de la tercera derivada, el término $-\alpha_\tau (1 - e^{-\beta_\tau(t-\tau)}) \varphi''(t^*)$ se anula y considerando que $\varphi'(t^*)$ puede expresarse en función de $\varphi(t^*)$, el valor de la tercera derivada es,

$$\varphi'''(t^*) = \alpha_\tau \beta_\tau e^{-\beta_\tau(t-\tau)} \varphi(t^*) \left[\beta_\tau + 2\alpha_\tau (1 - e^{-\beta_\tau(t-\tau)}) \right] \neq 0$$

ya que por hipótesis $\alpha_\tau > 0$, $\beta_\tau > 0$ y $0 < (1 - e^{-\beta_\tau(t-\tau)}) < 1$.

Por tanto, podemos asegurar que,

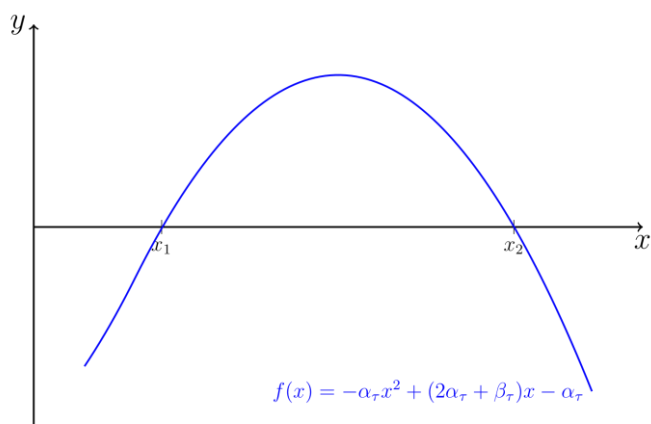
$$t^* = -\frac{1}{\beta_\tau} \ln \left(1 + \frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau} - \sqrt{\frac{\beta_\tau}{\alpha_\tau} + \left(\frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau}\right)^2} \right)$$

es un punto de inflexión de $\varphi(t)$.

A continuación analizamos el signo de la segunda derivada a la derecha y a la izquierda de dicho punto.

La función segunda derivada de $\varphi(t)$ está formada por el producto de una función exponencial que toma siempre valores estrictamente positivos y una función de segundo grado, $-\alpha_\tau x^2 + (2\alpha_\tau + \beta_\tau)x - \alpha_\tau$ donde $x = e^{-\beta_\tau(t-\tau)}$ cuyo dominio es el intervalo cerrado $[0, 1]$, que va a determinar el signo de la segunda derivada.

La representación gráfica de una función polinómica de grado 2 con el coeficiente de la variable de mayor grado negativo es una parábola invertida, con la siguiente forma,



donde, en este caso, $x_1 = 1 + \frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau} - \sqrt{\frac{\beta_\tau}{\alpha_\tau} + \left(\frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau}\right)^2}$ y $x_2 = 1 + \frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau} + \sqrt{\frac{\beta_\tau}{\alpha_\tau} + \left(\frac{\beta_\tau}{2\alpha_\tau}\right)^2}$ son los puntos de corte de la función con el eje de la x . De estos dos puntos sólo x_1 pertenece al dominio de la función polinómica y nos da el punto de inflexión de la función $\varphi(t)$. Por tanto, analizando gráficamente la función $f(x) = -\alpha_\tau x^2 + (2\alpha_\tau + \beta_\tau)x - \alpha_\tau$ observamos que para valores $0 < x < x_1$ toma valores negativos. El signo de la segunda derivada de $\varphi(t)$ será, por tanto, negativo. La función $\varphi(t)$, y también $R_\tau(t)$, a la izquierda del punto de inflexión es cóncava hacia el origen. Para valores entre $x_1 < x < 1$ la función polinómica toma valores positivos, por lo que el signo de la segunda derivada de $\varphi(t)$ es positivo. La función $\varphi(t)$, y también $R_\tau(t)$, a la derecha del punto de inflexión es convexa.